

CHAPITRE 1 – Proportionnalité

I. Reconnaître un tableau de proportionnalité

Définition

2 grandeurs sont dites proportionnelles si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant (ou en divisant) par un même nombre les valeurs de l'autre.

: 0,9	↗	nombre de baguettes	1	3	5	7	↘	x 0,9
		Prix (€)	0,90	2,70	4,5	6,30		

Le prix à payer est proportionnel au nombre de baguettes achetées.
 La situation est une situation de proportionnalité.
 Le tableau est un tableau de proportionnalité.

Applications : les tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

Nombre de macarons	6	10	15
Prix (en €)	8,4	14	21

$$\frac{8,4}{6} = 1,4 \qquad \frac{14}{10} = 1,4 \qquad \frac{21}{15} = 1,4$$

On obtient toujours le même résultat donc c'est un tableau de proportionnalité.

Durée de la location (en h)	2	4	5	6
Prix (en €)	17	34	42	51

$$\frac{17}{2} = 8,5 \qquad \frac{34}{4} = 8,5 \qquad \frac{42}{5} = 8,4 \qquad \frac{51}{6} = 8,5$$

On n'obtient pas toujours le même résultat donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

II. Calculer une 4^{ème} proportionnelle

Définition

Dans un tableau de proportionnalité à 4 cases, si on connaît 3 valeurs, la valeur manquante est appelée quatrième proportionnelle.

Problème

Chez le pâtissier, il faut 150g de farine pour réaliser un gâteau pour 4 personnes.
Quelle sera la quantité de farine nécessaire pour réaliser un gâteau pour 5 personnes ?

La situation est une situation de proportionnalité.

A. Passage par l'unité

Pour 4 personnes, il faut 150 g de farine.
Pour 1 personne, il faudrait $150 : 4$ soit 37,5 g.
Pour 5 personnes, il faut $5 \times 37,5$ soit 187,5 g de farine.

B. Coefficient de proportionnalité vertical

Quantité de farine (en grammes)	150	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">X</div>
Nombre de personnes	4	5	

$$150 : 4 = 37,5.$$

Le coefficient de proportionnalité vertical est 37,5.

$$5 \times 37,5 = 187,5.$$

La quantité de farine nécessaire est 187,5 g.

C. Coefficient de proportionnalité horizontal

Quantité de farine (en grammes)	150
Nombre de personnes	4	5

X

$5 : 4 = 1,25.$

Le coefficient de proportionnalité horizontal est 1,25.

$150 \times 1,25 = 187,5.$

La quantité de farine nécessaire est 187,5 g.

D. Combinaison linéaire

Quantité de farine (en g)	150	37,5	?
Nombre de personnes	4	1	5

$4 + 1 = 5.$

$150 + 37,5 = 187,5.$

La quantité de farine nécessaire est 187,5 g.

E. Produit en croix

Propriété des produits en croix (admise)

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ (b ≠ 0 et d ≠ 0)

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b ≠ 0 et d ≠ 0)

Exemple

Trouver le nombre x tel que $\frac{x}{15} = \frac{16}{20}$

D'après l'égalité des produits en croix :

$$20 \times x = 16 \times 15.$$

donc : $20 \times x = 240.$

donc : $x = 240 : 20$

donc : $x = 12.$

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité, il y a égalité de tous les produits en croix.

Quantité de farine (en g)	150	$x = ?$
Nombre de personnes	4	5

On recherche x , la quantité de farine nécessaire pour un gâteau de 5 personnes.

On utilise l'égalité des produits en croix et on trouve la valeur de x :

$$4 \times x = 5 \times 150.$$

donc : $4 \times x = 750.$

donc : $x = \frac{750}{4}.$

donc $x = 187,5.$

La quantité de farine nécessaire est 187,5 g.

III. Pourcentages

Méthode

Pour effectuer des calculs liés aux pourcentages, on peut toujours utiliser un (ou des) tableau(x) de proportionnalité.

A. Appliquer un pourcentage

Exemple

13% des 700 élèves de seconde d'un lycée passent en 1^{ère} S.
A combien d'élèves correspond ce pourcentage ?

	En 2 ^{nde}	En 2 ^{nde} et passant en 1 ^{ère} S
Nombre d'élèves	700	x
Pourcentage (%)	100	13

$$100 \times x = 700 \times 13.$$

donc : $100 \times x = 9100.$

donc : $x = \frac{9100}{100} = 91.$

91 élèves de 2^{nde} vont passer en 1^{ère} S.

Remarque

Prendre n% d'une quantité revient à multiplier directement cette quantité par $\frac{n}{100}$.

Exemple

Avec l'exemple précédent : $700 \times \frac{13}{100} = 91.$

On retrouve bien le résultat trouvé avec la 1^{ère} méthode.

B. Déterminer un pourcentage**Exemple**

Sur 550 candidats inscrits à un concours, 132 ont été reçus. Quel est le pourcentage de reçus par rapport au nombre d'inscrits ?

	Inscrits	Reçus
Nombre de candidats	550	132
Pourcentage (%)	100	x

$$550 \times x = 132 \times 100.$$

donc : $550 \times x = 13200.$

donc : $x = \frac{13200}{550} = 24.$

Il y a 24% de reçus par rapport au nombre d'inscrits.

IV. Proportionnalité et représentation graphique

Propriétés

- Toute situation de proportionnalité se représente graphiquement dans un repère du plan par une droite passant par l'origine du repère.
- Toute représentation graphique dont les points forment une droite passant par l'origine du repère représente une situation de proportionnalité.

Exemple

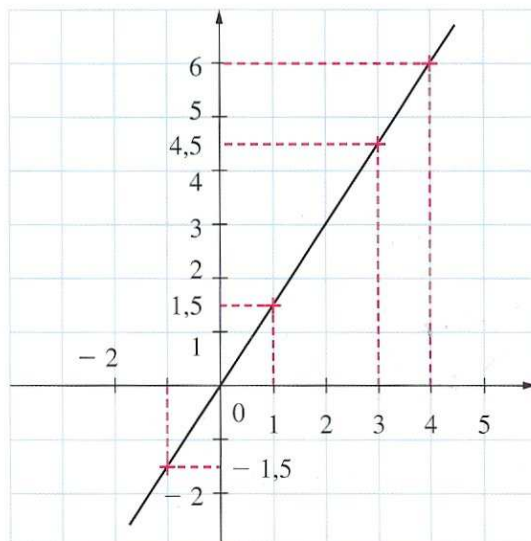
On donne le tableau de proportionnalité suivant :

x	- 1	0	1	3	4
y	- 1,5	0	1,5	4,5	6

On place dans un repère l'ensemble des points de coordonnées (x ; y).

On a donc les points : (- 1 ; - 1,5); (0; 0); (1; 1,5); (3; 4,5); (4; 6).

Représentation graphique



Les points forment bien une droite passant par l'origine O du repère.

Remarque

Si la représentation graphique est une droite mais qui ne passe pas par l'origine du repère, ou si la représentation graphique n'est pas une droite, alors la situation n'est pas une situation de proportionnalité.