

# CHAPITRE 1 – Fractions, puissances, radicaux

## I. Écritures fractionnaires

### A. Quotients égaux

#### Propriété

Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  des nombres avec  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ .

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc.$$

#### Exemple

$$\frac{3}{2} = \frac{36}{24} \text{ car } 3 \times 24 = 2 \times 36 = 72$$

### B. Addition en écriture fractionnaire

#### Propriété

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres avec  $c \neq 0$ .

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

#### Exemple

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

### Propriété

Soit a, b, c et d des nombres avec  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ .

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

### Exemple

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3} = \frac{6 + 35}{15} = \frac{41}{15}$$

## C. Multiplication en écriture fractionnaire

### Propriété

Soit a, b et k des nombres avec  $b \neq 0$ .

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$$

### Exemple

$$3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

### Propriété

Soit a, b, c et d des nombres avec  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ .

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

### Exemples

$$\frac{2}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{2 \times 8}{3 \times 5} = \frac{16}{15}$$

$$\frac{21}{5} \times \frac{45}{14} = \frac{21 \times 45}{5 \times 14} = \frac{\cancel{7} \times 3 \times 9 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 2 \times \cancel{7}} = \frac{27}{2}$$

### D. Division en écriture fractionnaire

#### Propriété

Soit a, b et c des nombres avec  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$ .

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = a \times \frac{c}{b}$$

Diviser par une quantité, c'est multiplier par l'inverse de cette quantité.

#### Exemple

$$3 : \frac{4}{5} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$$

#### Propriété

Soit a, b, c et d des nombres avec  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  et  $d \neq 0$ .

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

#### Exemple

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{1 \times 8}{2 \times 3} = \frac{1 \times \cancel{2} \times 4}{\cancel{2} \times 3} = \frac{4}{3}$$

## II. Puissances

### A. Introduction

#### Définition

Soit  $a$  un nombre quelconque non nul et  $n$  un entier naturel plus grand que 1.

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a. \quad (n \text{ facteurs})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Par convention, on donne :  $a^1 = a$ .  $a^0 = 1$ .

#### Exemple

$$3^2 = 3 \times 3 = 9.$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$$

### B. Puissances et propriétés associées

#### Propriétés

Soit  $a$ ,  $b$  2 nombres non nuls. Soient  $n$  et  $p$  2 entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p}.$$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}.$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n.$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

#### Exemples

$$2^4 \times 2^5 = 2^{4+5} = 2^9.$$

$$(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6.$$

$$2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3.$$

$$\frac{2^8}{2^2} = 2^{8-2} = 2^6.$$

$$\frac{8^2}{4^2} = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

### III. Radicaux

#### A. Introduction

##### Définition

Soit  $a$  un nombre positif ou nul.

On note  $\sqrt{a}$  l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut  $a$ .

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

##### Exemple

$\sqrt{9} = 3$  car  $(-3)^2 = 9$  et  $(3)^2 = 9$  mais 3 est le seul qui soit positif.

#### B. Radicaux et propriétés associées

##### Propriétés

Pour tout  $a \geq 0$  :  $\sqrt{a} \geq 0$ .

Pour tous nombres  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  :  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ .

Pour tous nombres  $a \geq 0$  et  $b > 0$  :  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

Mais attention !  $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

##### Exemples

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}.$$

$$\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{3} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

### C. Simplification de sommes et différences avec des radicaux

#### Exemple

Simplifier  $3\sqrt{2} - 2\sqrt{32} + \frac{1}{3}\sqrt{18}$ .

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} - 2\sqrt{32} + \frac{1}{3}\sqrt{18} &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{16 \times 2} + \frac{1}{3}\sqrt{9 \times 2} \\ &= 3\sqrt{2} - 2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{9} \times \sqrt{2} = \\ &= 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 1\sqrt{2} = \\ &= (3 - 8 + 1)\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

### D. Ecriture de quotients sans radical au dénominateur

#### Exemple

Ecrire sans radical au dénominateur :  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  ;  $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$  ;  $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$  ;  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$1) \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$2) \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3 \times 3} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

$$3) \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1} = 3\sqrt{2}+3.$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{6}}{3 - 2} = \frac{3 - \sqrt{6}}{1} = 3 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

## IV. Ordres de priorité dans un calcul numérique

### Règle 1

Un exposant ne concerne que le nombre qui le précède immédiatement

#### Exemples

Dans  $A = 2 \times 5^3$ , l'exposant ne concerne que 5.

$$A = 2 \times 125 = 250.$$

Dans  $B = (2 \times 5)^3$ , l'exposant concerne l'expression  $(2 \times 5)$ .

$$B = 10^3 = 1000.$$

### Règle 2

Lors d'un calcul numérique, il faut respecter les ordres de priorité suivants :

- 1) Les calculs entre parenthèse.
- 2) Les calculs avec opérateurs et/ou fonctions : puissances, racines carrées, sinus, cosinus, ...
- 3) Les multiplications et les divisions dans l'ordre de l'écriture.
- 4) Les additions et les soustractions dans l'ordre de l'écriture.

#### Exemple

$$1 - 3 \times 2^2 + \sqrt{36}/(4 - 1) \times 7 =$$

$$1 - 3 \times 2^2 + \sqrt{36}/3 \times 7 =$$

$$1 - 3 \times 4 + \sqrt{36}/3 \times 7 =$$

$$1 - 3 \times 4 + 6/3 \times 7 =$$

$$1 - 12 + 6/3 \times 7 =$$

$$1 - 12 + 2 \times 7 =$$

$$1 - 12 + 14 =$$

$$- 11 + 14 =$$

$$3.$$