CHAPITRE 3 – Ensembles de Nombres, Divisibilité

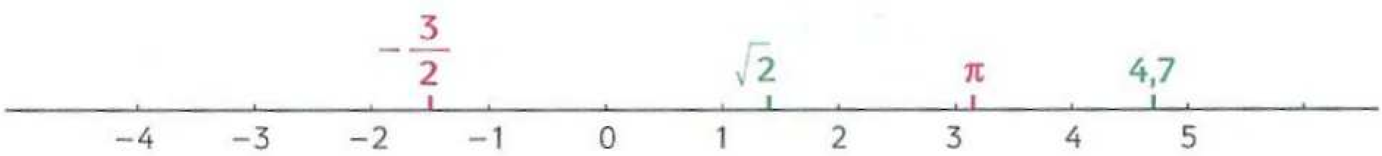
I. Les différents ensembles de nombres

A. L'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$

Définition

L'ensemble de tous les nombres déjà rencontrés au collège est l'ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$.

Illustration
$\mathbb{R}$ est représenté par l'ensembles des abscisses d'une droite graduée (admis).
Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point de cette droite.
Réciproquement, toute abscisse d'un point de la droite représente un réel.



B. Des nombres réels particuliers : les entiers naturels

Définition

L'ensemble des nombres suivants : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 … est l'ensemble des nombres entiers naturels. Il est noté $\mathbb{N}$.

Exemples
$6 \in \mathbb{N}$. $-2 \notin \mathbb{N}$.

C. Des nombres réels particuliers : les entiers relatifs

Définition

L'ensemble des nombres suivants : … ; – 4 ; – 3 ; – 2 ; – 1 ;0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 …
est l'ensemble des nombres entiers relatifs. Il est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$). Tout entier naturel est aussi un entier relatif.

Exemples

$6 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Z}$. $6{,}3 \notin \mathbb{Z}$.

D. Des nombres réels particuliers : les nombres décimaux

Définition

L'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire sous la forme $d = \frac{a}{10^n}$, où a est un nombre entier relatif et n un nombre entier naturel, est l'ensemble des nombres décimaux. Il est noté D.

D est aussi l'ensemble des réels qui ne comportent qu'un nombre fini de chiffre après la virgule.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D$. Tout entier naturel ou relatif est aussi un entier décimal.

Exemples

$6 = \frac{6}{1} = \frac{6}{10^0} \in D$

$-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-2}{10^0} \in D.$

$6{,}3 = \frac{63}{10} = \frac{63}{10^1} \in D.$

$3{,}45 = \frac{345}{100} = \frac{345}{10^2} \in D.$

$-\frac{5}{2} = -\frac{25}{10} = \frac{-25}{10^1} \in D.$

$\frac{1}{3} \approx 0{,}3333333\ldots \notin D.$

E. Des nombres réels particuliers : les nombres rationnels

Définition

L'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a est un nombre entier relatif et b un nombre entier naturel non nul, est l'ensemble des nombres rationnels. Il est noté $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q}$. Tout entier naturel ou relatif, tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel.

Exemples

$6 = \frac{6}{1} \in \mathbb{Q}$ $\quad -2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}$. $\quad 6{,}3 = \frac{63}{10} \in \mathbb{Q}$.

$3{,}45 = \frac{345}{100} \in \mathbb{Q}$. $\quad -\frac{5}{2} = \frac{-25}{10} \in \mathbb{Q}$. $\quad \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

$\pi \notin \mathbb{Q}$. $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

F. Des nombres réels particuliers : les nombres irrationnels

Définition

Les nombres réels qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qui ne sont pas rationnels, sont appelés irrationnels.
Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

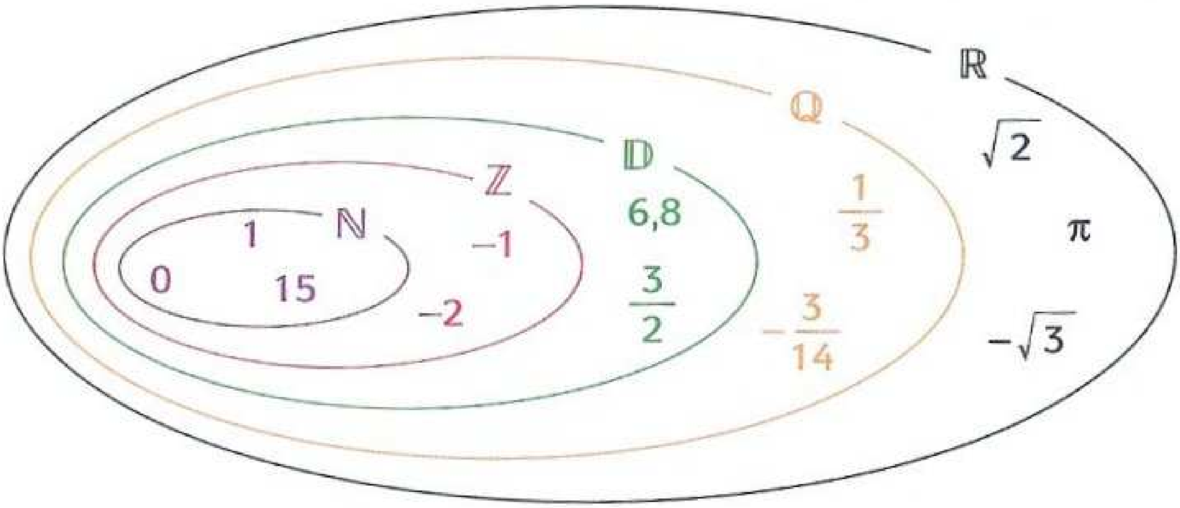
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemples

$\pi \notin \mathbb{Q}$ mais $\pi \in \mathbb{R}$.
π est un nombre irrationnel.
C'est également le cas de $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$…

G. Schéma récapitulatif

Illustration



II. Diverses écritures d'un nombre

A. Ecriture scientifique d'un nombre

Définition

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.
Cette notation est appelée écriture scientifique d'un nombre.

Exemples
$782341 = 7{,}82341 \times 10^5$.
$0{,}00014 = 1{,}4 \times 10^{-4}$.
$-1314{,}72 \times 10^{-6} = -1{,}31472 \times 10^3 \times 10^{-6} = -1{,}31472 \times 10^{-3}$.

B. Ordre de grandeur

Définition

La puissance de 10 la plus proche d'un nombre décimal est appelé l'ordre de grandeur de ce nombre.

Exemples
$782341 = 7{,}82341 \times 10^5$.
10^6 est l'ordre de grandeur de 782341 car $10^5 < 7{,}82341 \times 10^5 < 10^6$ (10×10^5) mais $7{,}82341 \times 10^5$ est plus proche de 10^6 que de 10^5.

$0{,}00014 = 1{,}4 \times 10^{-4}$.
10^{-4} est l'ordre de grandeur de 0,00014 car $10^{-4} < 1{,}4 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ (10×10^{-4}) mais $1{,}4 \times 10^{-4}$ est plus proche de 10^{-4} que de 10^{-3}.

$-1314{,}72 \times 10^{-6} = -1{,}31472 \times 10^{-3}$.
-10^{-3} est l'ordre de grandeur de $-1314{,}72 \times 10^{-6}$.

C. *Valeur exacte et valeurs approchées*

Définition

Tout nombre réel peut s'écrire sous forme d'une écriture décimale finie ou illimitée. En particulier, les nombres non décimaux ne peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres, leur écriture décimale étant illimitée. Dans ce cas, on ne peut représenter leur valeur exacte par une écriture décimale, et on est parfois obligé de considérer des valeurs approchées de ces nombres.

La précision de l'approximation (au dixième près ou à 0,01 près ou à 10^{-1} près, au centième près ou à 0,01 près ou à 10^{-2} près…) caractérise le nombre de décimales alors utilisé pour représenter le nombre.

Il existe deux types de valeurs approchées :
1) Valeur approchée par défaut ou troncature (plus petite ou égale au nombre)
2) Valeur approchée par excès (plus grande ou égale au nombre)

L'arrondi d'un nombre à une précision près est par définition celle des 2 valeurs approchées (par excès ou par défaut) qui est la plus proche du nombre.

La calculatrice, quant à elle, n'affiche dans tous les cas qu'un certain nombre de chiffres : elle ne donne donc pas toujours la valeur exacte mais parfois seulement une valeur approchée d'un nombre ou du résultat d'un calcul.

Exemples

Valeur exacte	Calculatrice	Valeur approchée à 10^{-3} près par défaut	Valeur approchée à 10^{-3} près par défaut	Arrondi à 10^{-3} près
$\frac{134}{7}$	19,14285711	19,142	19,143	19,143
$\frac{\sqrt{7}-2}{3}$	0,215250437	0,215	0,216	0,215
$\frac{3 \times \pi}{4}$	2,35619449	2,356	2,357	2,356

III. Divisibilité et nombres premiers

A. Diviseurs d'un entier naturel

Définition

Soient a et b 2 nombres entiers naturels avec b différent de 0.

On dit que b est un diviseur de a s'il existe un nombre entier naturel q tel que :
$a = b \times q$. On dit aussi que a est divisible par b.

Exemples
$12 = 2 \times 6$ donc 2 et 6 sont des diviseurs de 12.
$12 = 1 \times 12$ donc 1 et 12 sont des diviseurs de 12.
$12 = 3 \times 4$ donc 3 et 4 sont des diviseurs de 12.
$12 = 5 \times \frac{12}{5}$ mais 5 n'est pas un diviseur de 12 car $\frac{12}{5}$ n'est pas un entier.

Remarque

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins 2 diviseurs distincts :
1 et lui-même.

B. Nombres premiers

Définition

On appelle nombre premier un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'admet pas d'autre diviseur que 1 et lui-même.

Exemples
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31… sont des nombres premiers.
4 n'est pas un nombre premier car $4 = 2 \times 2$.
6 n'est pas un nombre premier car $6 = 2 \times 3$.

C. Décomposition en produit de facteur premiers

Théorème

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'est pas un nombre premier se décompose en produit de facteurs premiers.

Exemples

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31… sont des nombres premiers.
4 n'est pas un nombre premier car $4 = 2 \times 2$.
6 n'est pas un nombre premier car $6 = 2 \times 3$.

Exercice d'application directe

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :
   14 ; 24 ; 56 ; 67.
2) Simplifier la fraction $\dfrac{56 \times 67}{14 \times 24}$.

1)

14	2	24	2	56	2	67	67
7	7	12	2	28	2	1	
1		6	2	14	2		
		3	3	7	7		
		1		1			

$14 = 2 \times 7$.
$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.
$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$.
$67 = 1 \times 67$.

2) $\dfrac{56 \times 67}{14 \times 24} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{7} \times 67}{\cancel{2} \times \cancel{7} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 3} = \dfrac{67}{6}$.

D. Critères de divisibilité connus

Propriété 1

Un nombre entier est divisible par 2 s'il se finit par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemple
528 est divisible par 2, mais pas 529.

Propriété 2

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se finit par 0 ou 5.
Un nombre entier est divisible par 10 s'il se finit par 0.

Exemple
525 est divisible par 5, pas par 10.

Propriété 3

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

Exemple
528 se termine par 28 qui est divisible par 4. 528 est divisible par 4.
23418 n'est pas divisible par 4.

Propriété 4

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemple
$5 + 2 + 8 = 15$.
15 est divisible par 3. 528 est donc divisible par 3.
15 n'est pas divisible par 9. 528 n'est donc pas divisible par 9.