CHAPITRE 4 – Ordre, Valeur Absolue

I. Ordre et comparaison

A. Vocabulaire et notations

Définitions

« $<$ » signifie et se lit « strictement inférieur à ».
« $>$ » signifie et se lit « strictement supérieur à ».
« $<$ » et « $>$ » sont des inégalités au sens strict.

« $\leq$ » signifie et se lit « inférieur ou égal à ».
« $\geq$ » signifie et se lit « supérieur ou égal à ».
« $\leq$ » et « $\geq$ » sont des inégalités au sens large.

Définitions

« $x > 0$ » signifie « x est strictement supérieur à 0 » ou « x est strictement positif ».

« $x \geq 0$ » signifie « x est supérieur ou égal à 0 » ou « x est positif ou nul ».

Définition

« $1 \leq x \leq 3$ » est un encadrement : il signifie « x est compris entre 1 et 3 ».
Cet encadrement revient à une double inégalité : « $x \geq 1$ » et « $x \leq 3$ ».

Tous les résultats et règles énoncés ci-après avec des inégalités au sens strict restent valables, sauf indication contraire, avec des inégalités au sens large.

B. Comparaison de 2 nombres réels

Propriété

Soient a et b 2 réels.
$a < b$ équivaut à $a - b < 0$.

Comparer 2 nombres revient donc à étudier le signe de leur différence.

Exemple
Soient a et b 2 réels avec $a > 0$ et $b < 0$.
On veut comparer $(a - b)^2$ et $a^2 + b^2$.
On étudie le signe de $[(a - b)^2] - [a^2 + b^2]$.

$[(a - b)^2] - [a^2 + b^2] = [a^2 - 2ab + b^2] - [a^2 + b^2] = a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = - 2ab$.

Or $a > 0$ et $b < 0$ donc $ab < 0$ et par conséquent $- ab > 0$.
D'où $[(a - b)^2] - [a^2 + b^2] > 0$.
En conclusion $(a - b)^2 > a^2 + b^2$.

Propriété

Soient a, b et c 3 réels.
Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Démonstration
Supposons $a < b$ et $b < c$.
Alors $a - b < 0$ et $b - c < 0$.
On a : $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c)$.
Or $a - b < 0$ et $b - c < 0$ donc $(a - b) + (b - c) < 0$.
Finalement $a - c < 0$ et par conséquent $a < c$.

Remarque

La propriété précédente traduit le fait que la relation d'ordre « < » est transitive.

C. Ordre et addition

Propriété

Soient a, b, c 3 nombres réels.
Si $a < b$ alors :
$a + c < b + c$.
$a - c < b - c$.

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant ou en retranchant à chaque membre de l'inégalité un même nombre.

Démonstration
Supposons $a < b$.

$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$.

Or :
$a < b$ donc $a - b < 0$.

Donc $(a + c) - (b + c) < 0$.
En conclusion, $a + c < b + c$.

On procéderait de la même façon pour démontrer la deuxième inégalité.

Exemple
Soit x un réel tel que $x + 2 < -3$. Montrer que x est strictement inférieur à -5.

$x + 2 < -3$.

J'ajoute 2 à chaque membre de l'inégalité.

$x + 2 - 2 < -3 - 2$

$x < -5$.

Propriété

Soient a, b, c et d 4 nombres réels.
Si $a < b$ et $c < d$ alors :
$a + c < b + d$.

On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.
Mais attention, on ne peut pas soustraire membre à membre des inégalités.

Démonstration
Supposons $a < b$ et $c < d$.

$(a + c) – (b + d) = a + c – b – d = a – b + c – d = (a – b) + (c – d)$.

Or :
$a < b$ donc $a – b < 0$.
$c < d$ donc $c – d < 0$.

Donc $(a – b) + (c – d) < 0$.
Par conséquent : $(a + c) – (b + d) < 0$.

En conclusion, $a + c < b + d$.

Exemple
On suppose $x \leq 3$ et $y \leq – 1$. Montrer que $x + y$ est inférieur ou égal à 2.

J'ajoute les 2 inégalités membre à membre.
$x + y \leq 3 + (– 1)$.
$x + y \leq 2$.

Remarque 1

Attention, on ne peut pas soustraire membre à membre des inégalités de même sens.

Remarque 2

On dit que la relation d'ordre « < » est compatible avec l'addition mais pas avec la soustraction.

D. Ordre et multiplication

Propriété

Soient a, b, c 3 nombres réels.
Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
Si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant chaque membre de l'inégalité par un même nombre strictement positif.
On change le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant chaque membre de l'inégalité par un même nombre strictement négatif.

Démonstration
Supposons $a < b$ et $c > 0$.

$ac - bc = c(a - b)$.

Or : $a < b$ donc $a - b < 0$ et $c > 0$.

Donc $c(a - b) < 0$ et par conséquent $ac - bc < 0$.
En conclusion, $ac < bc$.

On procéderait de la même façon pour démontrer le cas $c < 0$.

Par ailleurs, une division revenant à une multiplication par l'inverse, et l'inverse d'un nombre ayant le même signe que ce nombre, on démontrerait aussi de manière similaire le cas de la division.

Exemples

$3x > 2$	$-4x \geq 1$.
$\frac{3x}{3} > \frac{2}{3}$.	$\frac{-4x}{-4} \leq \frac{1}{-4}$
$x > \frac{2}{3}$.	$x \leq -\frac{1}{4}$.

Propriété

Soient a, b, c, d 4 nombres réels strictement positifs.
Si $a < b$ et $c < d$ alors :
$ac < bd$.

On peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens à terme positifs.une inégalité de même sens.

Démonstration
Soient a, b, c et d 4 réels strictement positifs avec $a < c$ et $b < d$.

$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$.

Or :
$a < b$ donc $a - b < 0$. De plus $c > 0$ par énoncé. D'où $c(a - b) < 0$.
$c < d$ donc $c - d < 0$. De plus $b > 0$ par énoncé. D'où $b(c - d) < 0$.

Donc $c(a - b) + b(c - d) < 0$ et par conséquent $ac - bd < 0$.
En conclusion, $ac < bd$.

Exemple
On suppose $1 < x < 3$ et $\frac{1}{4} < y < \frac{5}{3}$.
Donner un encadrement du produit xy.

On multiplie les 2 inégalités membre à membre
(tous les termes étant strictement positifs) :
$1 \times \frac{1}{4} < x \times y < 3 \times \frac{5}{3}$.
$\frac{1}{4} < xy < 5$.

Remarque

Attention, on ne peut pas diviser membre à membre des inégalités de même sens, même à termes positifs.

E. Comparaison des carrés

Propriété

Soient a et b 2 nombres réels strictement positifs.

$a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

2 nombres strictement positifs sont toujours rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Démonstration

Soient a et b 2 nombres réels strictement positifs.

Supposons d'abord $a < b$.
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Or :
$a + b > 0$ car $a > 0$ et $b > 0$.
$a < b$ donc $a - b < 0$.
Donc $(a + b)(a - b) < 0$ et par conséquent $a^2 - b^2 < 0$.
En conclusion, $a^2 < b^2$.

Réciproquement maintenant, supposons $a^2 < b^2$.
Alors $a^2 - b^2 < 0$.
Or : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ et $a + b > 0$.
Donc $a - b < 0$.
En conclusion $a < b$.

Exemple

Soit x un réel compris entre 2 et 4. Donner un encadrement de $-3x^2$.

$2 \leq x \leq 4$.
On passe aux carrés sachant que tous ces nombres sont positifs.
$2^2 \leq x^2 \leq 4^2$ donc $4 \leq x^2 \leq 16$.
On multiplie chaque membre par -3, ce qui change le sens des inégalités.
$-3 \times 16 \leq -3 \times x^2 \leq -3 \times 4$
Donc :
$-48 \leq -3x^2 \leq -12$.

F. Comparaison des racines carrés

Propriété

Soient a et b 2 nombres réels strictement positifs.

$a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2 nombres strictement positifs sont toujours rangés dans le même ordre que leurs racines carrés.

Démonstration
Soient a et b 2 nombres réels strictement positifs.

Supposons d'abord $a < b$.
Alors $a - b < 0$.
Or : $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ comme somme de 2 termes strictement positifs.
Donc $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ et en conclusion $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Réciproquement maintenant, supposons $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.
Or : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.
De plus, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ donc $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$.
Donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0$ et par conséquent $a - b < 0$.
En conclusion $a < b$.

Exemple
Soit x un réel compris entre 4 et 9. Donner un encadrement de $2\sqrt{x} - 1$.

$4 \leq x \leq 9$.
On passe aux racines carrées sachant que tous ces nombres sont positifs.
$\sqrt{4} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{9}$ donc $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$.
On multiplie chaque membre par 2, ce qui ne change pas le sens des inégalités.
$2 \times 2 \leq 2 \times \sqrt{x} \leq 2 \times 3$ donc $4 \leq 2\sqrt{x} \leq 6$.
On retranche 1 à chaque membre, ce qui ne change pas le sens des inégalités.
$4 - 1 \leq 2\sqrt{x} - 1 \leq 6 - 1$ donc $3 \leq 2\sqrt{x} - 1 \leq 5$.

G. Comparaison des inverses

Propriété

Soients a et b 2 nombres réels strictement positifs.

$a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2 nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Démonstration

Soients a et b 2 nombres réels strictement positifs.

Supposons d'abord $a < b$.

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab} = -\frac{a-b}{ab}$.

Or $ab > 0$ car $a > 0$ et $b > 0$. De plus, $a < b$ donc $a - b < 0$.

Donc $\frac{a-b}{ab} < 0$, $-\frac{a-b}{ab} > 0$ et par conséquent $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$. En conclusion, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Réciproquement maintenant, supposons $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Alors $-\frac{a-b}{ab} > 0$.

Or : $ab > 0$. Donc $a - b < 0$. En conclusion $a < b$.

Exemple

Soit x un réel compris entre 1 et 3. Donner un encadrement de $-\frac{1}{x}$.

$1 \leq x \leq 3$.

On passe aux inverses (les nombres sont positifs), en changeant le sens des inégalités.

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$.

On multiplie chaque membre par – 1, ce qui change le sens des inégalités.

$-1 \times 1 \leq -1 \times \frac{1}{x} \leq -1 \times \frac{1}{3}$.

Donc : $-1 \leq -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3}$.

H. Comparaison de a, a^2 et a^3 dans le cas a positif ou nul

Propriété

Soit a un nombre réel positif ou nul.

Si $a = 0$ ou $a = 1$, alors $a = a^2 = a^3$.

Si $0 < a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

Si $a > 1$, alors $a < a^2 < a^3$.

Démonstration
Soit a un nombre positif ou nul.

Si $a = 0$, $a^2 = 0$ et $a^3 = 0$ donc $a = a^2 = a^3$.
Si $a = 1$, $a^2 = 1$ et $a^3 = 1$ donc $a = a^2 = a^3$.

Si $0 < a < 1$:
$a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$. Or $a^2 > 0$. De plus, $a < 1$ donc $a - 1 < 0$.
D'où $a^3 - a^2 < 0$ donc $a^3 < a^2$.
$a^2 - a = a(a - 1)$. Or $a > 0$. De plus, $a < 1$ donc $a - 1 < 0$.
D'où $a^2 - a < 0$ donc $a^2 < a$.
Finalement, $a^3 < a^2 < a$.

Si $a > 1$:
$a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$. Or $a^2 > 0$. De plus, $a > 1$ donc $a - 1 > 0$.
D'où $a^3 - a^2 > 0$ donc $a^3 > a^2$.
$a^2 - a = a(a - 1)$. Or $a > 0$. De plus, $a > 1$ donc $a - 1 > 0$.
D'où $a^2 - a > 0$ donc $a^2 > a$.
Finalement, $a < a^2 < a^3$.

Exemple
Comparer 2π, $4\pi^2$, $8\pi^3$.

$4\pi^2 = (2\pi)^2$ et $8\pi^3 = (2\pi)^3$. Or $2\pi > 1$.
Donc $(2\pi) < (2\pi)^2 < (2\pi)^3$.
Finalement $2\pi < 4\pi^2 < 8\pi^3$.

II. Intervalles

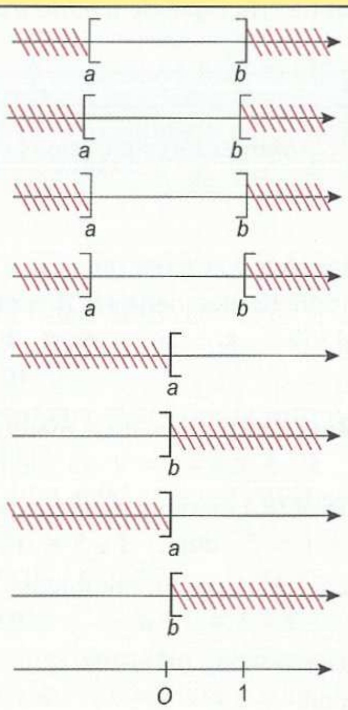
A. Introduction

Définitions

Soient a et b 2 nombres réels.
L’intervalle fermé [a ; b] est l’ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
L’intervalle ouvert]a ; b[est l’ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.

Illustration des différents types d’intervalles de ℝ

Intervalle I	Ensemble des réels x dans I qui vérifient	Représentation
$[a\,;\,b]$ intervalle fermé	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a\,;\,b[$ intervalle semi-ouvert	$a \leqslant x < b$	
$]a\,;\,b]$	$a < x \leqslant b$	
$]a\,;\,b[$ intervalle ouvert	$a < x < b$	
$[a, +\infty[$ demi-droite fermée	$x \geqslant a$	
$]-\infty\,;\,b]$	$x \leqslant b$	
$]a\,;\,+\infty[$ demi-droite ouverte	$x > a$	
$]-\infty\,;\,b[$	$x < b$	
$]-\infty\,;\,+\infty[$	Ensemble ℝ	

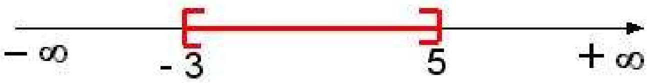


Remarques

1) $+\infty$ et $-\infty$ sont des symboles. Ils ne désignent pas des nombres réels.
2) Par convention, le crochet est toujours ouvert en $+\infty$ et $-\infty$.

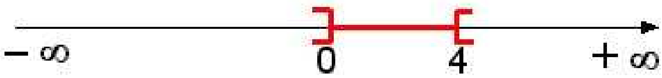
Exemples

1) L’ensemble des x supérieurs ou égaux à – 3 et inférieurs ou égaux à 5 est l’intervalle [– 3 ; 5]. Donc $-3 \leq x \leq 5$ équivaut à $x \in [-3 ; 5]$.

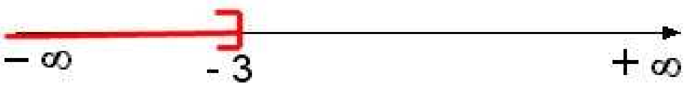


2) L’ensemble des x supérieurs strictement à 2 est l’intervalle]2 ; +∞[.
$x > 2$ équivaut à $x \in]2 ; +\infty[$.

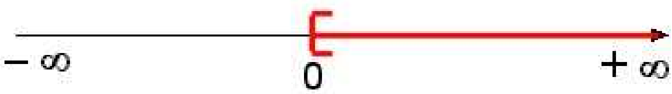
3) L’ensemble des x supérieurs strictement à 0 et inférieurs strictement à 4 est l’intervalle]0 ; 4[. Donc $0 < x < 4$ équivaut à $x \in]0 ; 4[$.



4) L’ensemble des x inférieurs ou égaux à – 3 est l’intervalle] – ∞ ; – 3].
$x \leq -3$ équivaut à $x \in]-\infty ; -3]$.



5) L’ensemble des x positifs ou nuls est l’intervalle [0 ; +∞[.
$x \geq 0$ équivaut à $x \in [0 ; +\infty[$.



Notation

L’ensemble des réels se note $\mathbb{R} =]-\infty\ ; +\infty[$.
L’ensemble des réels positifs ou nuls se note $\mathbb{R}^+ = [0\ ; +\infty[$.
L’ensemble des réels négatifs ou nuls se note $\mathbb{R}^- =]-\infty\ ; 0]$.
L’ensemble des réels non nuls se note $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
L’ensemble des réels strictement positifs se note $\mathbb{R}^{+*} =]0\ ; +\infty[$.
L’ensemble des réels strictement négatifs se note $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty\ ; 0[$.

Définitions

On dit qu’un intervalle est borné quand ses 2 bornes sont finies (c'est-à-dire ses 2 bornes sont 2 réels, donc aucune borne n’est infinie).
On appelle segment un intervalle à la fois fermé et borné.

Exemples
$[3\ ; 5]$ et $]-4\ ; 3]$ sont des intervalles bornés.
$]2\ ; +\infty[$ n’est pas un intervalle borné.
$[3\ ; 5]$ est fermé et borné : c’est un segment.
$]-4\ ; 3]$ est borné mais n’est pas fermé : ce n’est pas un segment.

Définition

Soit $I = [a\ ; b]$ un intervalle fermé borné.
On appelle amplitude de l’intervalle I le réel égal à $b - a$.
On appelle centre de l’intervalle I le réel égal à $\dfrac{a+b}{2}$.
On appelle rayon de l’intervalle I le réel égal à $\dfrac{b-a}{2}$.

Exemples
$I = [3\ ; 5]$.
L’amplitude de I est : $5 - 3 = 2$.
Son centre est : $\dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
Son rayon est : $\dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

B. Réunion d'intervalles

Définition

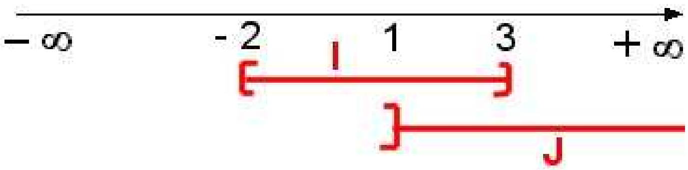
Soient I et J 2 intervalles de $\mathbb{R}$.
La réunion de I et J, notée I ∪ J (« I union J »), désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou (inclusif : à l'un, à l'autre ou aux deux) à J.

Méthode de détermination d'une réunion de 2 intervalles.

Pour déterminer la réunion de 2 intervalles I et J, on représente graphiquement ces 2 intervalles au moyen de 2 traits sur la droite numérique des réels, et on cherche les zones où au moins un trait est présent.

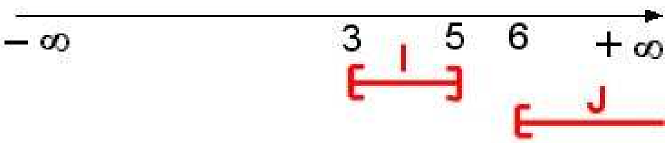
Exemples

1) I = [– 2 ; 3] et J =]1 ; + ∞[. Déterminer I ∪ J.



On cherche les zones où au moins un trait est présent.
Ici, I ∪ J =] – ∞ ; 4].

2) I = [3 ; 5] et J = [6 ; + ∞[. Déterminer I ∪ J.



On cherche les zones où au moins un trait est présent.
Ici, I ∪ J = [3 ; 5] ∪ [6 ; + ∞[.

C. Intersection d’intervalles

Définition

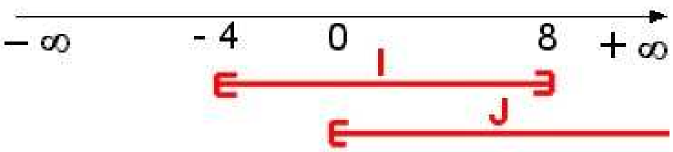
Soient I et J 2 intervalles de $\mathbb{R}$.
L’intersection de I et J, notée $I \cap J$ (« I inter J »), désigne l’ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à I et à J.

Méthode de détermination d’une intersection de 2 intervalles.

Pour déterminer l’intersection de 2 intervalles I et J, on représente graphiquement ces 2 intervalles au moyen de 2 traits sur la droite numérique des réels, et on cherche les zones où les 2 traits sont présents en même temps.

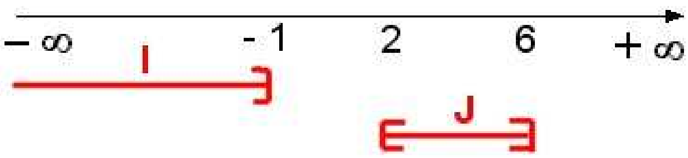
Exemples

1) $I = [-4 ; 8]$ et $J = [0 ; +\infty[$. Déterminer $I \cap J$.



On cherche les zones où les 2 traits sont présents en même temps.
Ici, $I \cap J = [0 ; 8]$.

2) $I =]-\infty ; -1]$ et $J = [2 ; 6]$. Déterminer $I \cap J$.



On cherche les zones où les 2 traits sont présents en même temps.
Ici, $I \cap J = \varnothing$. $I \cap J$ est l’ensemble vide.

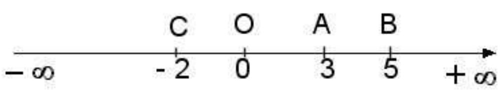
III. Valeur absolue

A. Distance entre 2 réels

Définition

La distance entre 2 réels x et y, notée d(x ; y) est la distance, sur la droite des réels, qui sépare les points d'abscisses respectives x et y.

Illustration



d(3 ; 0) = OA = 3 – 0 = 3.
d(– 2 ; 5) = CB = 5 – (– 2) = 5 + 2 = 7.

Propriété

La distance entre 2 réels x et y est égale au plus grand des 2 réels moins le plus petit.

Si x = y, d(x ; y) = 0.
Si x > y, d(x ; y) = y – x.
Si x < y, d(x ; y) = x – y.

Propriété

La distance entre 2 réels est une relation dite symétrique.
Pour tous réels x et y, d(x ; y) = d(y ; x).

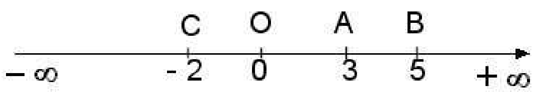
Démonstration
La distance entre 2 réels est égale au plus grand des 2 moins le plus petit.
Donc d(x ; y) = d(y ; x).

B. Valeur absolue d'un réel

Définition

Soit x un nombre réel.
La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance entre 0 à x.

Illustration



$|3| = d(3 ; 0) = OA = 3.$
$|-2| = d(-2 ; 0) = OC = 2.$

Propriété

Soit x un nombre réel.

$$|x| : \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration
Si $x = 0$, $|x| = |0| = d(0 ; 0) = 0 = x$.
Si $x > 0$, $|x| = d(0 ; x) = x - 0$ (car x plus grand que 0). Donc $|x| = x$.
Si $x < 0$, $|x| = d(0 ; x) = 0 - x$ (car 0 plus grand que x). Donc $|x| = -x$.

Exemples
$|8| = 8$ car $8 \geq 0$.
$|-2| = -(-2) = 2$ car $-2 < 0$.
$|1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2}$ car $1 + \sqrt{2} \geq 0$.
$|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$ car $1 - \sqrt{3} < 0$.
$|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$.

Propriété

La valeur absolue de tout nombre réel est positive ou nulle.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.

Démonstration
$|x|$ se définit comme une distance entre 0 et x, donc comme un nombre positif.

Propriété

2 nombres opposés ont la même valeur absolue.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.

Démonstration
Si $x = 0$, $|-x| = |-0| = |0| = |x|$.
Si $x > 0$, $|-x| = -(-x)$ car $-x < 0$. Donc $|-x| = x = |x|$ car $x > 0$.
Si $x < 0$, $|-x| = -x$ car $-x > 0$. Donc $|-x| = -x = |x|$ car $x < 0$.

Propriété

$|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.

Démonstration
$|x| = 0$ équivaut à $d(0 ; x) = 0$ ce qui revient à $x = 0$.

Propriété

$|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

Démonstration
$|x| = |y|$ équivaut à ($x = y$ ou $-x = y$ ou $x = -y$ ou $-x = -y$), c'est-à-dire :
($x = y$ ou $x = -y$).

Propriété

Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Démonstration

Si x = 0, $\sqrt{x^2} = \sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0 = |0| = |x|$.

Si x > 0 :

Par définition, la racine carrée d'un nombre 1 est le seul nombre réel positif qui mis au carré donne le nombre 1.

Or x > 0 et $(x)^2 = x^2$. Donc $\sqrt{x^2} = x$.

Comme x > 0, |x| = x. D'où $\sqrt{x^2} = |x|$.

Si x < 0 :

$-x > 0$ et $(-x)^2 = x^2$. Donc $\sqrt{x^2} = -x$.

Comme x < 0, |x| = – x. D'où $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

Propriété

Pour tous réels x et y, d(x ; y) = |x – y|.

Démonstration

Si x = y : d(x ; y) = 0 et |x – y| = |0| = 0. L'égalité est vraie.

Si x > y : d(x ; y) = x – y et |x – y| = x – y car x – y > 0. L'égalité est vraie.

Si x < y :

d(x ; y) = y – x et |x – y| = – (x – y) = y - x car x – y < 0. L'égalité est vraie.

Exemple

d(– 3 ; 5) = |(– 3) – 5| = |– 8| = 8.

Propriétés

Pour tous réels x et y, $|xy| = |x| \times |y|$.

Pour tout réel x, pour tout réel non nul y, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration

Si $x > 0$ et $y > 0$, $xy > 0$ donc $|xy| = xy$. $|x| = x$ et $|y| = y$ donc $|x| \times |y| = xy$.
Si $x > 0$ et $y < 0$, $xy < 0$ donc $|xy| = -xy$. $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $|x| \times |y| = -xy$.
Si $x < 0$ et $y > 0$, $xy < 0$ donc $|xy| = -xy$. $|x| = -x$ et $|y| = y$ donc $|x| \times |y| = -xy$.
Si $x < 0$ et $y < 0$, $xy > 0$ donc $|xy| = xy$. $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $|x| \times |y| = xy$.
Si l'un au moins des réels est nul, $|xy| = 0$ et $|x| \times |y| = 0$.
Dans tous les cas, $|xy| = |x| \times |y|$.

On démontrerait la seconde propriété (avec les quotients) de manière similaire.

Exemple

$|-5x| = |-5| \times |x| = 5|x|$.

Propriété

Inégalité triangulaire :
Pour tous réels x et y, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration

Si $x > 0$ et $y > 0$, $x + y > 0$ donc $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.
Si $x > 0$ et $y < 0$:

1) Si $x + y \geq 0$, $|x + y| = x + y = x - (-y) = |x| - |y|$. Donc $|x + y| \leq |x| \leq |x| + |y|$.
2) Si $x + y < 0$, $|x + y| = -(x + y) = -y - x = |y| - |x|$. Donc $|x + y| \leq |y| \leq |y| + |x|$.

Si $x < 0$ et $y < 0$, $x + y < 0$ donc $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$.
Si $x < 0$ et $y > 0$:

3) Si $x + y \geq 0$, $|x + y| = x + y = y - (-x) = |y| - |x|$. Donc $|x + y| \leq |y| \leq |y| + |x|$.
4) Si $x + y < 0$, $|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| - |y|$. Donc $|x + y| \leq |x| \leq |x| + |y|$.

Si $x = 0$ ou $y = 0$, $|xy| = 0$ et $|x| + |y| \geq 0$. Donc $|x + y| \leq |x| \leq |x| + |y|$.

