# CHAPITRE 5 – Généralités sur les Fonctions

## I. Introduction – Vocabulaire – Ensemble de définition

### A. Notion de fonction et vocabulaire associé

**Définition**

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un nombre réel et un seul noté f(x).

$$f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

**Vocabulaire associé**

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que le nombre réel f(x) est l'image de x par f.

On dit que x est un antécédent de f(x) par f.

On dit que f est définie sur D ou que D est l'ensemble de définition de f.

**Exemple**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$.

1) Calculer l'image de 2 par f.
2) Calculer l'image de – 1 par f.
3) Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par f.
4) Déterminer le ou les antécédents de 3 par f,
5) Déterminer le ou les antécédents de – 5 par f.

1)
$f(2) = -2 \times (2)^2 + 3 = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$.
L'image de 2 par f est – 5.

2)
$f(-1) = -2 \times (-1)^2 + 3 = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$.
L'image de – 1 par f est 1.

3)
$f(\sqrt{2}) = -2 \times (\sqrt{2})^2 + 3 = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1$.
L'image de $\sqrt{2}$ par f est – 1.

4)
Rechercher le ou les antécédents de 3 par f revient à résoudre l'équation :
$f(x) = 3$.

$-2x^2 + 3 = 3$
$-2x^2 = 0$
$x^2 = \frac{0}{-2} = 0$.
$x = 0$.

3 a un seul antécédent par f qui est 0.

5)
Rechercher le ou les antécédents de – 5 par f revient à résoudre l'équation :
$f(x) = -5$.

$-2x^2 + 3 = -5$
$-2x^2 + 3 + 5 = 0$
$-2x^2 + 8 = 0$
$-2(x^2 - 4) = 0$.
$-2(x - 2)(x + 2) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2 = 0$ | ou | $x - 2 = 0$ | ou | $x + 2 = 0$ |
| Impossible | ou | $x = 2$ | ou | $x = -2$ |

– 5 a deux antécédents par f qui sont – 2 et 2.

## B. *Détermination de l'ensemble de définition*

**Définition**

Quand l'ensemble de définition d'une fonction f n'est pas indiqué explicitement, on convient que son ensemble de définition est l'ensemble des réels x tels que f(x) existe.

L'ensemble de définition d'une fonction f est souvent noté $D_f$.

**Exemple 1**
Soit f la fonction définie sur [1 ; 3] par $f(x) = \sqrt{x}$.

L'ensemble de définition de f est indiqué dans l'énoncé : $D_f = [1 ; 3]$.

**Exemple 2**
Soit g la fonction telle que $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 5}$.

La fonction g est définie si et seulement si : $x + 5 \neq 0$
$x \neq 5$.
Le réel 5 est appelé valeur interdite pour la fonction g.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{5\} = ]-\infty ; 5[ \cup [5 ; +\infty[$

**Exemple 3**
Soit h la fonction telle que $h(x) = \sqrt{x + 1}$.

La fonction h est définie si et seulement si : $x + 1 \geq 0$
$x \geq -1$.
Les réels plus petits que $-1$ sont des valeurs interdites pour la fonction h.

$D_h = [-1 ; +\infty[$.

# II. Courbe représentative et méthodes graphiques.

Dans tout le paragraphe le plan est supposé muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

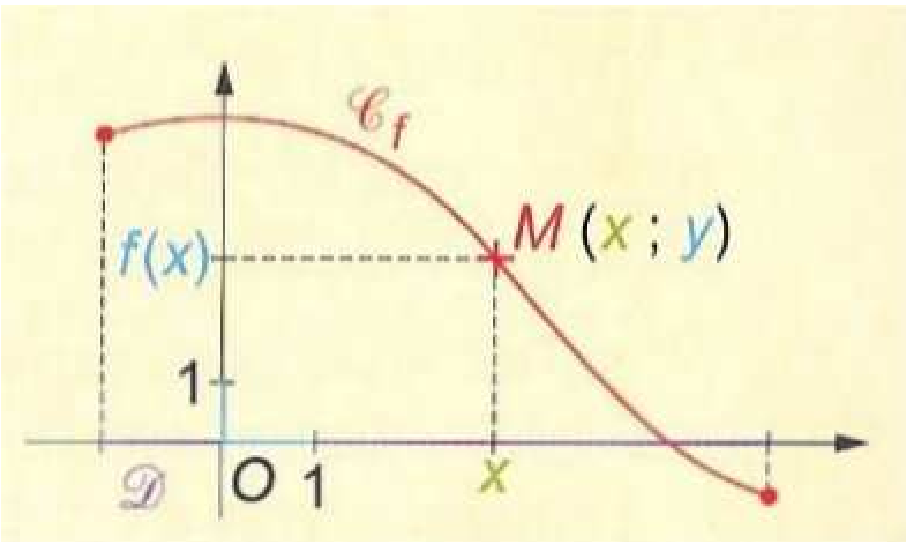
## A. Courbe représentative d'une fonction f

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
La courbe représentative de la fonction f, notée $C_f$, est l'ensemble des points M de coordonnées (x ; f(x)), où x est un élément de D.

On dit alors que $C_f$ a pour équation :
$C_f : y = f(x)$.

**Illustration**




**Remarque**

Un point M de coordonnées (x ; y) appartient à $C_f$ si et seulement si x appartient à D et y = f(x).

## B. Lectures graphiques d'images et d'antécédents

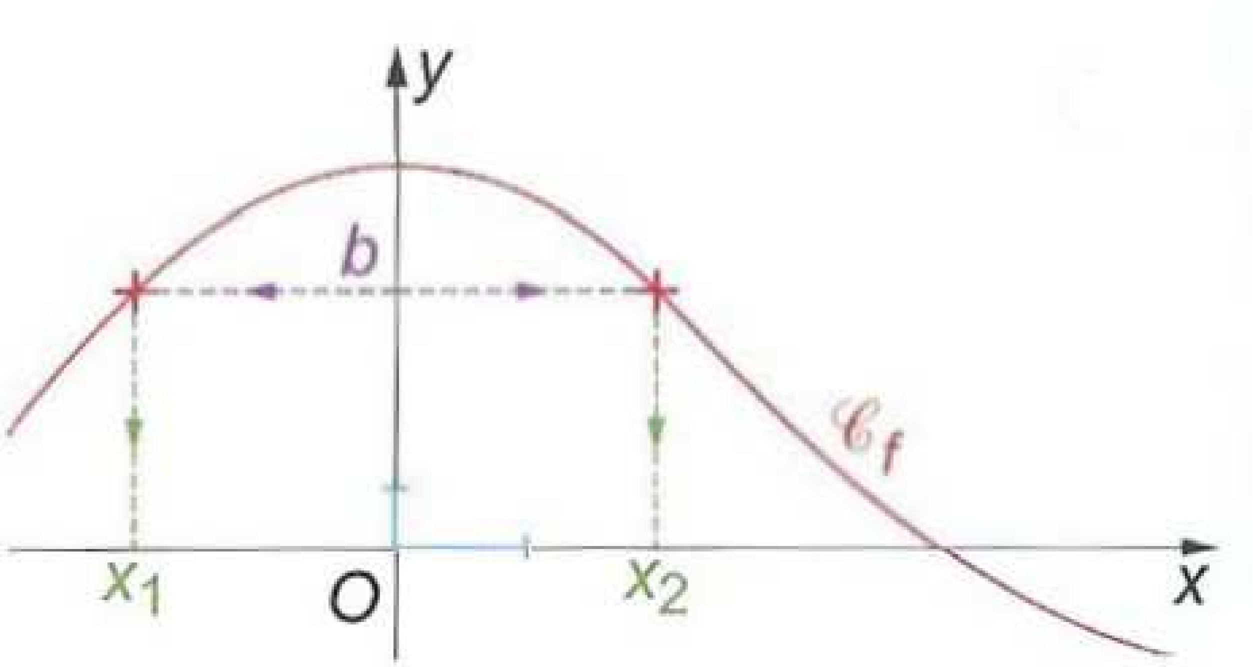
**Méthodes**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D dont la courbe représentative est $C_f$.

Pour trouver graphiquement l'image d'un réel a de D par la fonction f, on cherche l'ordonnée b = f(a) du point de $C_f$ d'abscisse a.

Pour trouver graphiquement le ou les antécédents d'un réel b par la fonction f, on cherche l'abscisse ou les abscisses du ou des points de $C_f$ d'ordonnée b.

**Exemple**




Le réel b admet ici 2 antécédents par la fonction f :
ce sont les réels notés $x_1$ et $x_2$ sur le graphique ci-dessus.

Réciproquement, les images de $x_1$ et $x_2$ par la fonction f sont toutes les 2 représentées par le même nombre b.

$f(x_1) = b$ et $f(x_2) = b$.

## C. *Résolutions graphiques d'équations*

### Méthodes

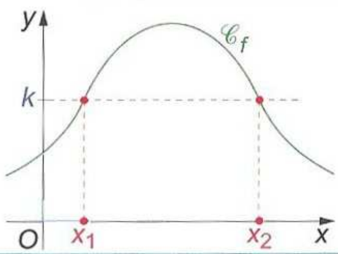
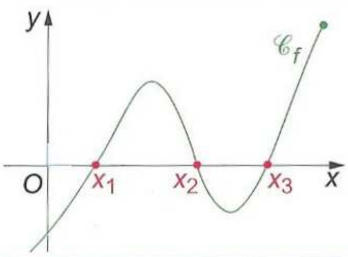
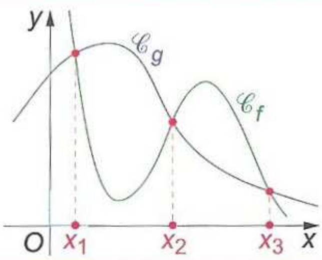
Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D dont les courbes représentatives sont $C_f$ et $C_g$.

Résoudre l'équation f(x) = k, c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $C_f$ avec la droite horizontale d'équation y = k.

Résoudre l'équation f(x) = 0, c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $C_f$ avec l'axe des abscisses (cas particulier pour k = 0).

Résoudre l'équation f(x) = g(x), c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $C_f$ avec $C_g$.

### Exemple

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Équation** $f(x) = k$ | Les solutions sont les **abscisses des points** de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est le nombre $k$. |  | La droite horizontale d'équation $y = k$ coupe la courbe en deux points ; on lit les abscisses : $S = \{x_1 ; x_2\}$ |
| **Équation** $f(x) = 0$ | Les solutions sont les **abscisses des points** d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. |  | La courbe coupe l'axe des abscisses en trois points ; on lit les abscisses : $S = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$ |
| **Équation** $f(x) = g(x)$ | Les solutions sont les **abscisses des points** d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. |  | Les courbes se coupent en trois points ; on lit les abscisses : $S = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$ |

## D. Résolutions graphiques d’inéquations

### Méthodes

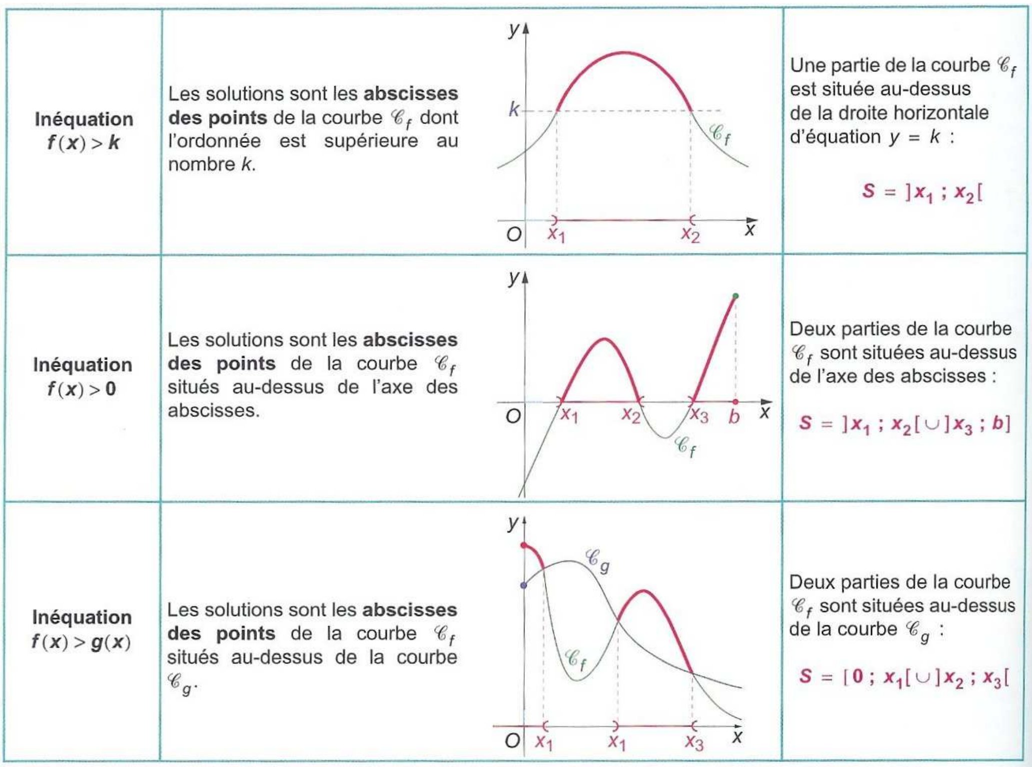
Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D dont les courbes représentatives sont $C_f$ et $C_g$.

Résoudre l’inéquation f(x) > k (resp. f(x) < k), c’est trouver les abscisses des points de $C_f$ situés au dessus (resp. en dessous) de la droite horizontale d’équation y = k.

Résoudre l’inéquation f(x) > 0 (resp. f(x) < 0), c’est trouver les abscisses des points de $C_f$ situés au dessus (resp. en dessous) de l’axe des abscisses (cas particulier pour k = 0).

Résoudre l’inéquation f(x) > g(x) (resp. f(x) < g(x)), c’est trouver les abscisses des points de $C_f$ situés au dessus (resp. en dessous) de $C_g$.

### Exemple



| | | |
|---|---|---|
| **Inéquation** $f(x) > k$ | Les solutions sont les **abscisses des points** de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l’ordonnée est supérieure au nombre *k*. | Une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite horizontale d’équation $y = k$ : $S = ]x_1\ ;\ x_2[$ |
| **Inéquation** $f(x) > 0$ | Les solutions sont les **abscisses des points** de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de l’axe des abscisses. | Deux parties de la courbe $\mathscr{C}_f$ sont situées au-dessus de l’axe des abscisses : $S = ]x_1\ ;\ x_2[ \cup ]x_3\ ;\ b]$ |
| **Inéquation** $f(x) > g(x)$ | Les solutions sont les **abscisses des points** de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$. | Deux parties de la courbe $\mathscr{C}_f$ sont situées au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ : $S = [0\ ;\ x_1[ \cup ]x_2\ ;\ x_3[$ |

# III. Sens de variation d'une fonction.

## A. Croissance d'une fonction sur un intervalle

**Définition**

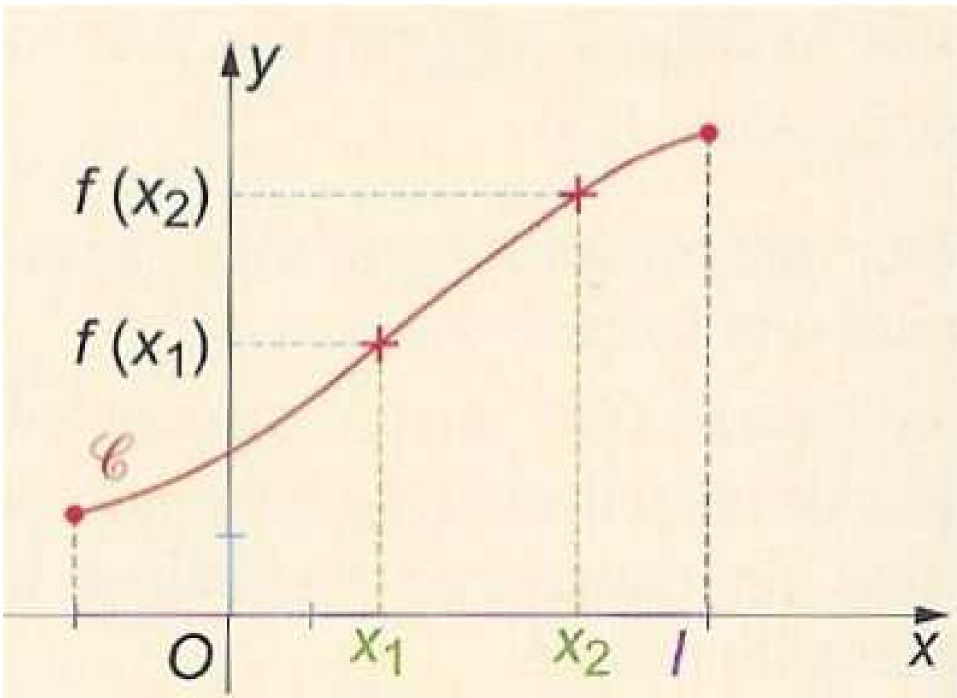
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est dite croissante sur I si, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I tels que $x_1 < x_2$, alors : $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est dite strictement croissante sur I si, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I tels que $x_1 < x_2$, alors : $f(x_1) < f(x_2)$.

On dit des fonctions croissantes (et strictement croissantes) sur I qu'elles « conservent l'ordre » sur cet intervalle.

**Illustration**



## B. *Décroissance d'une fonction sur un intervalle*

**Définition**

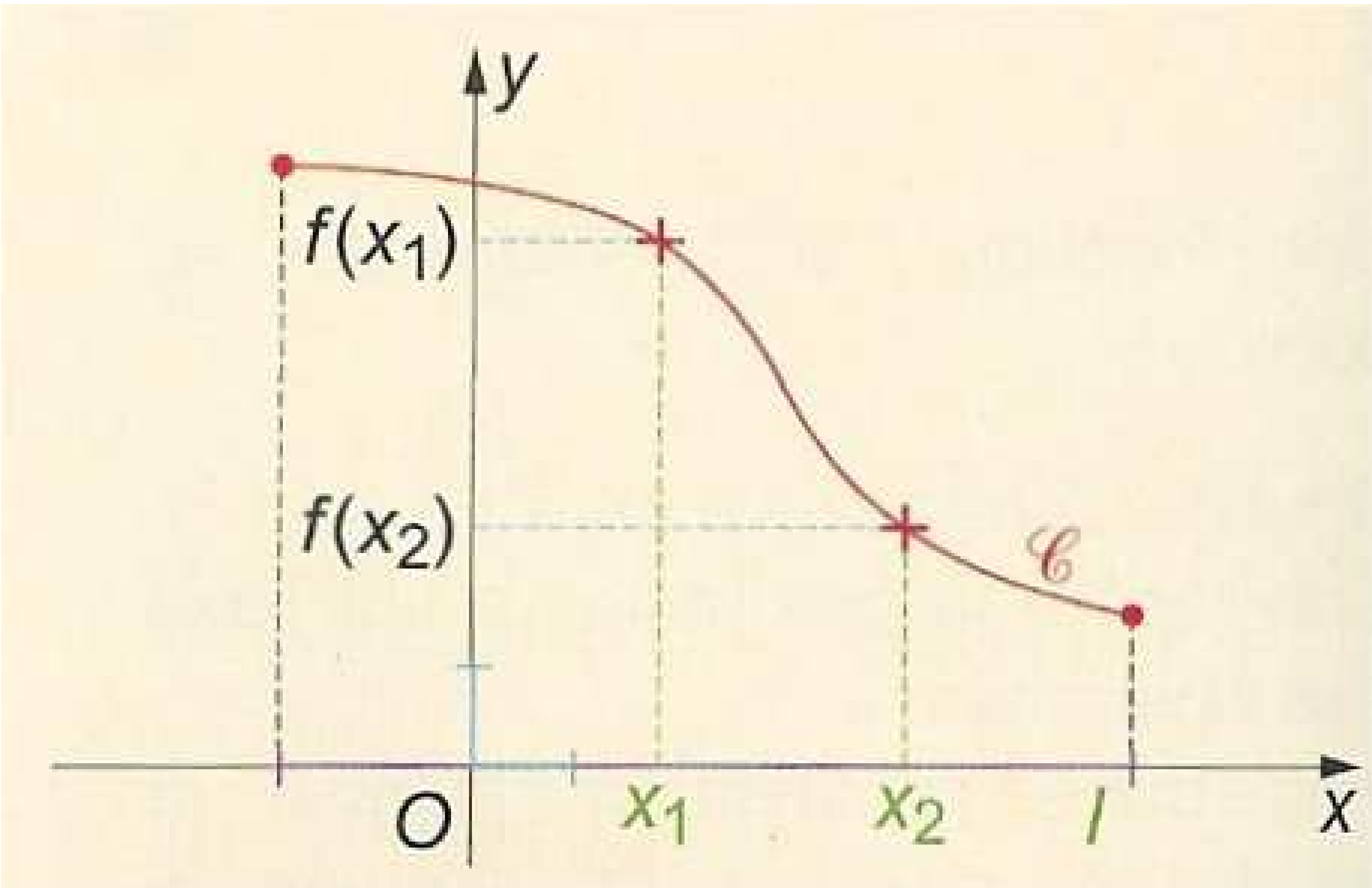
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est dite décroissante sur I si, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I tels que $x_1 < x_2$, alors : $f(x_1) \geq f(x_2)$.

f est dite strictement décroissante sur I si, pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de I tels que $x_1 < x_2$, alors : $f(x_1) > f(x_2)$.

On dit des fonctions décroissantes (et strictement décroissantes) sur I qu'elles « inversent l'ordre » sur cet intervalle.

**Illustration**



## *C. Monotonie d'une fonction sur un intervalle*

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est (strictement) monotone sur I si f est soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante, soit constante sur I.

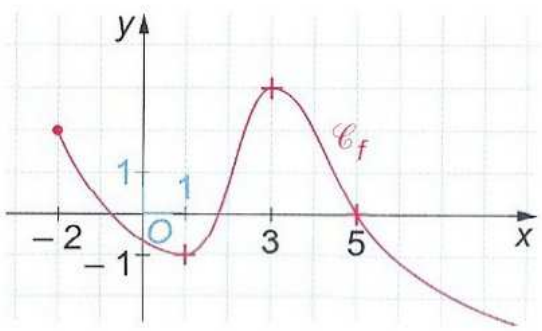
## *D. Tableau de variations d'une fonction*

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On résume les variations de la fonction f sur D dans un tableau appelé tableau de variations de f sur D.

**Illustration**




| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | |

## E. Etude des variations d'une fonction

**Méthode**

Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I, on prend deux éléments $x_1$ et $x_2$ de I en supposant $x_1 < x_2$ et on compare $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en analysant le signe de $f(x_1) - f(x_2)$.

Si $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$ (resp. $< 0$) alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$) et la fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I.

Si $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$ (resp. $> 0$) alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$) et la fonction f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.

**Exemple**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
1) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty ; 1]$.
2) Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

1)
Soient $x_1$ et $x_2$ deux éléments de $]-\infty ; 1]$ tels que $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - 2x_1 + 3 - (x_2^2 - 2x_2 + 3) \\ &= x_1^2 - 2x_1 + 3 - x_2^2 + 2x_2 - 3 \\ &= x_1^2 - 2x_1 - x_2^2 + 2x_2 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2). \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

Or :
$x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$.
$x_1 \leq 1$ et $x_2 \leq 1$ donc $x_1 + x_2 \leq 2$ donc $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$.

Donc $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$.

Pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de $]-\infty ; 1]$ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 1]$.

2)

Soient $x_1$ et $x_2$ deux éléments de [1 ; +∞ [ tels que $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - 2\,x_1 + 3 - (x_2^2 - 2\,x_2 + 3) \\ &= x_1^2 - 2\,x_1 + 3 - x_2^2 + 2\,x_2 - 3 \\ &= x_1^2 - 2\,x_1 - x_2^2 + 2\,x_2 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - 2\,x_1 + 2\,x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(\,x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2). \\ &= (x_1 - x_2)(\,x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

Or :

$x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$.

$x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ donc $x_1 + x_2 \leq 2$ donc $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$.

Donc $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$.

Pour tous réels $x_1$ et $x_2$ de [1 ; +∞ [ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Donc la fonction f est croissante sur [1 ; +∞ [.

# IV. Extremums d'une fonction, majorants et minorants.

## A. *Minimum et maximum d'une fonction*

**Définition**

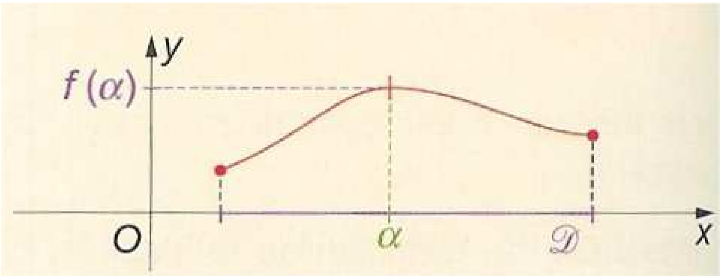
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f admet un maximum f(a) en a si, pour tout réel x de I :
$f(a) \geq f(x)$.

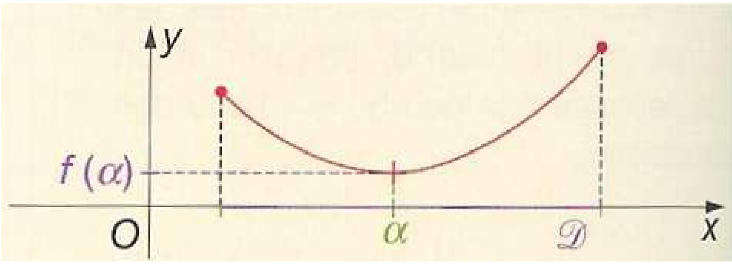
On dit que f admet un minimum f(b) en b si, pour tout réel x de I :
$f(b) \leq f(x)$.

Un extrémum d'une fonction est un minimum ou un maximum.

**Illustration**




Ci-dessus, la fonction f admet un maximum f(α) en x = α sur D.




Ci-dessus, la fonction f admet un minimum f(α) en x = α sur D.

**Exemple**
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = -1 + 3 = 2$.
Comme f est décroissante sur $]-\infty ; 1]$, et croissante sur $[1 ; +\infty[$, f admet le minimum $f(1) = 2$ en $x = 1$.

## *B. Majorants et minorants d'une fonction*

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est majorée par M sur I (ou que M est un majorant de f sur I) si pour tout réel x de I, $f(x) \leq M$.

On dit que f est minorée par m sur I (ou que m est un minorant de f sur I) si pour tout réel x de I, $f(x) \geq m$.

**Exemple**
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
On sait d'après ci-avant que f admet 2 comme minimum sur ℝ donc f est minorée par tout réel plus petit que 2.

# V. Signe d'une fonction sur un intervalle

## A. Fonctions positives, négatives, nulles sur un intervalle

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est dite positive (resp. strictement positive) sur I si, pour tout réel x de I :
$f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) > 0$).

f est dite nulle sur I si, pour tout réel x de I, $f(x) = 0$.

f est dite négative (resp. strictement négative) sur I si, pour tout réel x de I :
$f(x) \leq 0$ (resp. $f(x) < 0$).

On résume parfois toutes ces données sur une fonction dans un tableau de signe.

## B. Détermination algébrique du signe d'une fonction

**Méthode**

Pour déterminer algébriquement le signe d'une fonction f sur un intervalle I, on peut résoudre l'équation $f(x) \geq 0$ sur I.

**Exemple**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$.

$f(x) \geq 0$
$3x + 2 \geq 0$
$3x \geq -2$
$x \geq -2/3$.

La fonction f est strictement positive sur ]– 2/3 ; + ∞[.
La fonction f et nulle pour x = – 2/3.
La fonction f est strictement négative sur ]– ∞ ; – 2/3[.

On peut résumer ces informations dans le tableau de signes suivants :

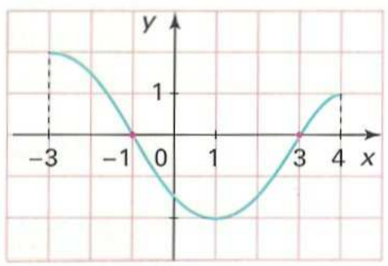
| $x$ | $-\infty$ | | $-2/3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $3x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

## C. Détermination graphique du signe d'une fonction

**Méthode**

Lorsque la courbe d'une fonction f est située au dessus (ou sur) l'axe des abscisses, la fonction est positive (ou nulle).
Lorsque la courbe est située en dessous de l'axe des abscisses, elle est négative.

**Exemple**
On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur [– 3 ; 4]




Sur [– 3 ; – 1] la courbe est au dessus de (ou sur) l'axe des abscisses.
Sur [– 1 ; 3] la courbe est en dessous de (ou sur) l'axe des abscisses.
Sur [3 ; 4] la courbe est de nouveau au dessus de l'axe des abscisses.

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $3$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

# VI. Parité, imparité, périodicité d'une fonction

## A. *Ensemble symétrique par rapport à 0*

**Définition**

Un ensemble de réels D est dit symétrique par rapport à 0 (ou encore symétrique par rapport à l'origine) si :

Pour tout x de D, – x appartient aussi à D.

**Exemples**
A = [– 2 ; -2] est symétrique par rapport à 0.

B = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est pas symétrique par rapport à 0 car :
– 1 appartient à B mais pas 1.

C = ]– 3 ; 4[ n'est pas symétrique par rapport à 0 car :
3 (par exemple) appartient à C mais pas – 3.

D = $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* = ]-\infty ; +\infty[$ est symétrique par rapport à 0.

E = $]-\infty ; 2[ \cup ]2 ; \infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 car :
– 2 appartient à E mais pas 2.

**Remarque**

Lorsqu'une fonction f est définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0, sa représentation graphique est centrée horizontalement sur l'axe des ordonnées.

Il y a en effet, par définition d'un ensemble symétrique par rapport à 0, autant d'intervalle en abscisse à gauche du 0 qu'à droite du 0.

## B. *Fonctions paires*

**Définition**

Une fonction f définie sur un ensemble D est dite paire sur D si et seulement si :

1) D est symétrique par rapport à 0.
2) Pour tout x de D, f(– x) = f(x).

**Exemple**
Montrer que la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 2$ est paire.

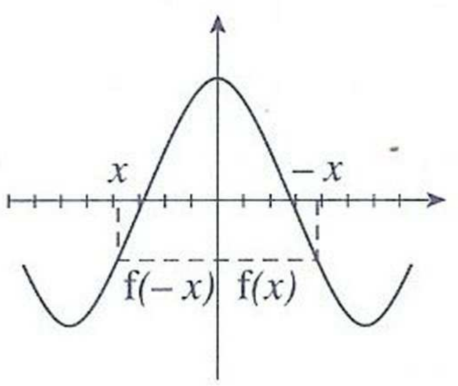
1) ℝ est symétrique par rapport à 0.
2) Pour tout x de ℝ, $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$.

**Propriété**

La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées (Oy) pour axe de symétrie.

En conséquence, les fonctions paires seront étudiées pour les valeurs positives de la variables. Le reste se déduira par symétrie.

**Illustration**




fonction paire

## C. Fonctions impaires

**Définition**

Une fonction f définie sur un ensemble D est dite impaire sur D si et seulement si :

1) D est symétrique par rapport à 0.
2) Pour tout x de D, $f(-x) = -f(x)$.

**Exemple**
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$ est impaire.

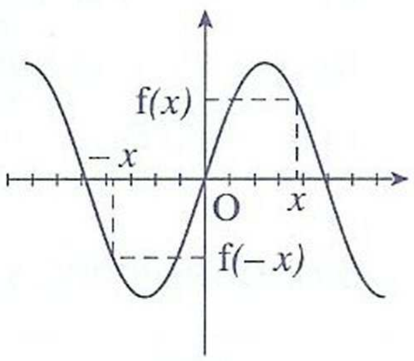
1) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$.

**Propriété**

La courbe représentative d'une fonction impaire admet le point origine O pour centre de symétrie.

En conséquence, les fonctions impaires seront étudiées pour les valeurs positives de la variables. Le reste se déduira par symétrie.

**Illustration**




fonction impaire

## *D. Fonctions périodiques*

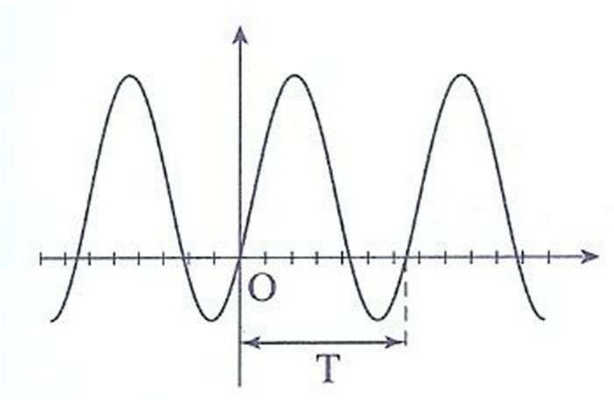
**Définition**

Une fonction f définie sur D est dite périodique de période T > 0 si et seulement si :

Pour tout x de D, x + T appartient aussi à D et :
f(x + T) = f(x).

**Exemple**
Dans le cadre de l'étude des fonctions de référence, la fonction cosinus (qui à x associe cos(x)) et la fonction sinus (qui à x associe sin(x)) sont des fonctions 2 π périodiques sur ℝ.

**Illustration**




fonction périodique

**Propriété**

Les fonctions T-périodiques sont étudiées sur un intervalle de longueur T, le reste se déduisant par un ensemble de translations horizontales.