CHAPITRE 6 – Fonctions Affines

I. Introduction

Définition

Soient a et b, 2 nombres appartenant à $\mathbb{R}$.

On appelle fonction affine toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow ax + b \end{array}$$

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.
La fonction f est une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Cas particulier 1

Si $a = 0$: $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow b \end{array}$

f est alors la fonction constante égale à b.

Cas particulier 2

Si $b = 0$: $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow ax \end{array}$

f est alors une fonction dite linéaire.

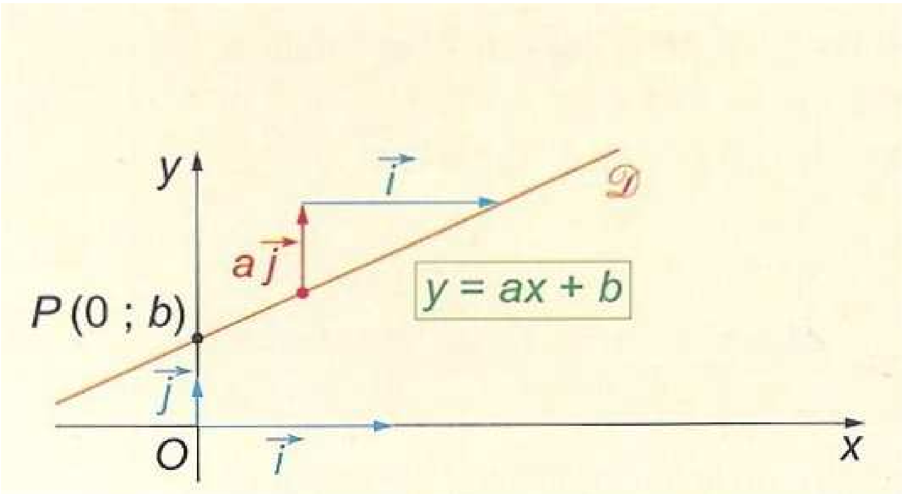
II. Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$.

Le réel a est appelé coefficient directeur de la droite.
Le réel b est appelé ordonnée à l'origine de la droite.

Illustration



Remarques

1) La droite passe par le point de coordonnées P (0 ; b). Le réel b représente donc l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.

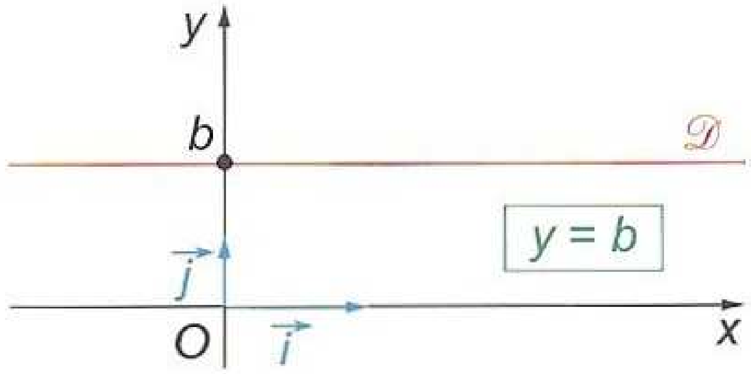
2) On verra dans le paragraphe suivant que lorsqu'on part d'un point de la droite et qu'on se déplace verticalement de a unités graphiques en ordonnée, on se déplace horizontalement de 1unité graphique en abscisse.

3) On verra plus tard (chapitre sur les droites) que toute droite du plan admet une équation du type $y = ax + b$ (si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) ou $x = c$ (si elle est parallèle à l'axe des ordonnées).

Cas particulier 1

La représentation graphique de la fonction constante f définie sur ℝ par
f(x) = b est la droite d'équation y = b.
C'est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

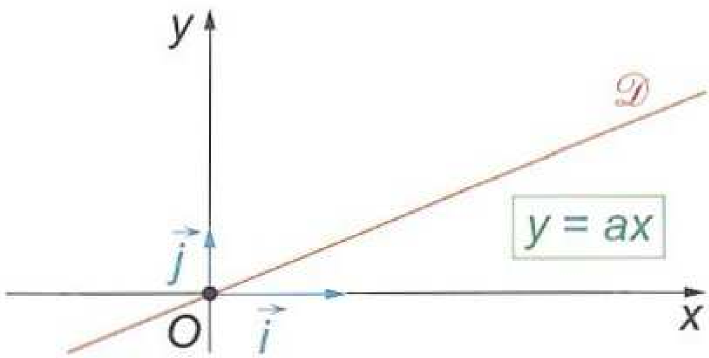
Illustration



Cas particulier 2

La représentation graphique de la fonction linéaire f définie sur ℝ par
f(x) = ax est la droite d'équation y = ax.
C'est une droite passant par l'origine du repère, le point O (0 ; 0).

Illustration



III. Taux de variation (ou d'accroissement)

A. Taux de variation (ou d'accroissement) d'une fonction quelconque

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
Soient x_1 et x_2 appartenant à D tels que $x_1 \neq x_2$.

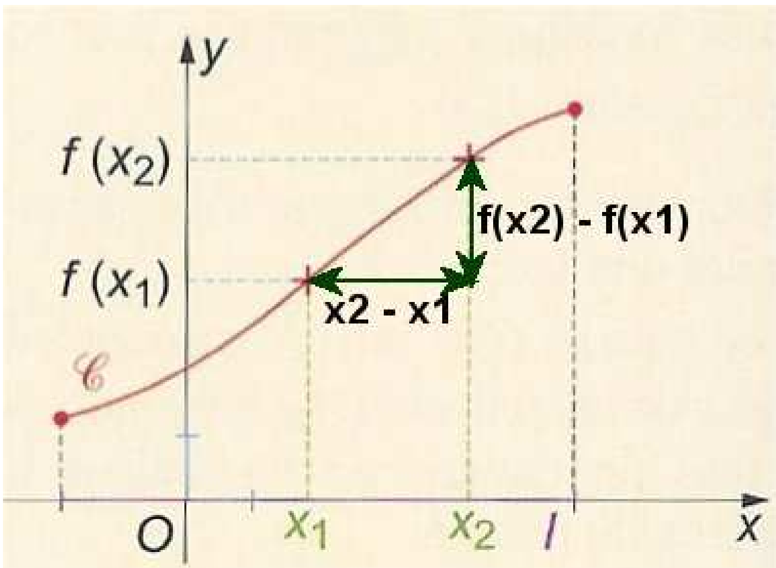
On appelle taux de variation de f entre x_1 et x_2 le nombre réel suivant :

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ou encore

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (avec $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$) ou même

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (avec $\Delta y = y_2 - y_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$)

Illustration



B. Taux de variation (ou d'accroissement) d'une fonction affine

Théorème

Si f est une fonction affine telle que f(x) = ax + b, alors son taux de variation est indépendant des réels distincts x_1 et x_2 : il est égal au réel a.

Réciproquement, si le taux de variation d'une fonction f est égal à un réel m pour toutes valeurs de x_1 et x_2, alors la fonction est affine et f(x) = mx + b.

Démonstration
Soit f une fonction affine définie par f(x) = ax + b. Soit x_1 et x_2 2 réels distincts.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Le taux de variation est bien constant égal à a.

Réciproquement : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous x_1 et x_2 réels distincts, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$. Alors $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$.
Posons $x_1 = 0$ et $x_2 = x$ non nul.
Pour tout $x \neq 0$, on a f(x) – f(0) = m(x – 0) = mx. Donc f(x) = mx + f(0).
Soit a = m et b = f(0). Pour tout x non nul, on a f(x) = ax + b.
De plus f(0) = b et $a\times 0 + b = b$. Donc l'égalité ci-dessus reste valable pour x = 0.
D'où f(x) = ax + b pour tout x réel et la fonction f est bien affine.

Corollaire

Soit f une fonction affine sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax + b.
Soient x_1 et x_2 2 réels distincts.

Si $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$, alors $\Delta y = y_2 - y_1 = a$. (voir première figure du II.)

Démonstration
Soit x_1 et x_2 2 réels distincts tels que $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$.
Comme $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ pour tous réels x1 et x2 distincts, $\Delta y = a\,\Delta x = a \times 1 = a$.

IV. Lectures graphiques de a et b

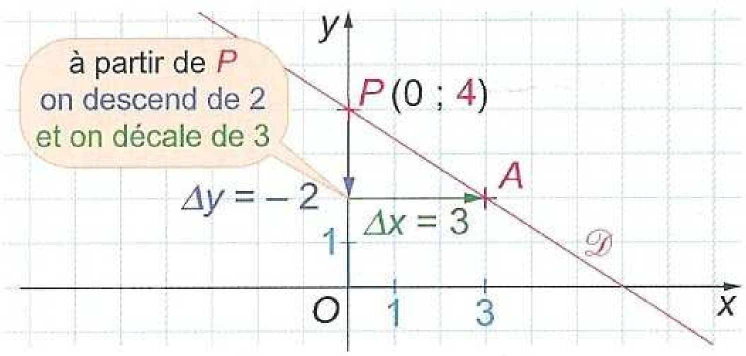
Méthode

Soit f une fonction affine définie sur ℝ par f(x) = ax + b.
La représentation graphique de f est donc la droite d'équation y = ax + b.

Pour trouver a (coefficient directeur de la droite), on calcule un taux de variation quelconque de la fonction en prenant 2 points particuliers de la droite (si possible « intéressants » dans l'optique du calcul).

Pour trouver b (ordonnée à l'origine de la droite), on lit graphiquement la valeur de l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0 (qui est aussi le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

Exemple
La droite D est la représentation graphique d'une fonction affine f telle que :
f(x) = ax + b. Trouver a, son coefficient directeur et b son ordonnée à l'origine.



D passe par P(0 ;4) donc son ordonnée à l'origine b vaut 4.

De plus, entre P(0 ;4) et A(3 ; 2) :
$\Delta x = x_A - x_P = 3 - 0 = 3$ $\qquad$ $\Delta y = y_A - y_P = 2 - 4 = -2$.

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

Le coefficient directeur a de la droite D est donc $-\frac{2}{3}$.

L'équation de la droite D est donc : $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

V. Sens de variation

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur ℝ par $f(x) = ax + b$.

Si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur ℝ.

Si $a = 0$, alors la fonction f est constante sur ℝ.

Si $a < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur ℝ.

Démonstration

Soit f la fonction affine définie sur ℝ par $f(x) = ax + b$.
Soient x_1 et x_2 deux éléments de ℝ tels que $x_1 < x_2$.
$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$.

Comme $x_1 < x_2$, on sait que $x_1 - x_2 < 0$.

<u>Cas $a > 0$</u>

$a(x_1 - x_2) < 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) < 0$ et $f(x_1) < f(x_2)$.
Pour tous réels x_1 et x_2 de ℝ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur ℝ.

<u>Cas $a < 0$</u>

$a(x_1 - x_2) > 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$ et $f(x_1) > f(x_2)$.
Pour tous réels x_1 et x_2 de ℝ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.
Donc la fonction f est constante sur ℝ.

<u>Cas $a = 0$</u>

$f(x) = b$ pour tout x. D'où le résultat.

Tableau de variation de la fonction f définie par f(x) = ax + b

<u>Cas a > 0</u>.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	↗	

<u>Cas a = 0</u>.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	→	

<u>Cas a < 0</u>.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	↘	

VI. Signe

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax + b.

Si a > 0, alors la fonction f est strictement négative sur $]-\infty\ ; -\dfrac{b}{a}[$, nulle pour x $= -\dfrac{b}{a}$ et strictement positive sur $]-\dfrac{b}{a}\ ; +\infty[$.

Si a = 0, alors la fonction f est toujours du signe de b.

Si a < 0, alors la fonction f est strictement positive sur $]-\infty\ ; -\dfrac{b}{a}[$, nulle pour x $= -\dfrac{b}{a}$ et strictement négative sur $]-\dfrac{b}{a}\ ; +\infty[$.

Démonstration

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax + b.

$ax + b \geq 0$

$ax \geq -b$

<u>Cas a > 0</u>

$ax \geq -b$ revient à $x \geq -\dfrac{b}{a}$, d'où le signe de f.

<u>Cas a < 0</u>

$ax \geq -b$ revient à $x \leq -\dfrac{b}{a}$, d'où le signe de f.

<u>Cas a = 0</u>

f(x) = b pour tout x d'où le résultat.

Tableau de signe de la fonction f définie par f(x) = ax + b

<u>Cas a > 0</u>.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

<u>Cas a = 0</u>.

La fonction f est toujours du signe de b. Le tableau dépend donc de la position de b par rapport à 0

<u>Cas a < 0</u>.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	