CHAPITRE 8 – Fonction Inverse

I. Introduction

Définition

On appelle fonction inverse la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \dfrac{1}{x} \end{array}$$

II. Sens de variation et signe

Propriété

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
2) La fonction f est strictement négative sur $]-\infty\,;0[$ et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $x_1 < x_2$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1x_2}.$$

Comme $x_1 < x_2$, on sait que $x_2 - x_1 > 0$.

Comme x_1 et x_2 appartiennent à $\mathbb{R}^{+*}$ avec $x_1 < x_2$, $x_1x_2 > 0$.

D'où $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1x_2} > 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$ et $f(x_1) > f(x_2)$.

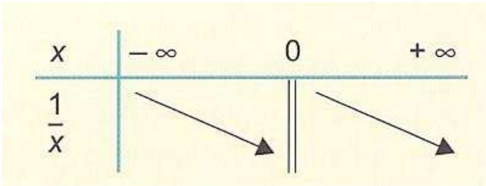
Pour tous réels x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^+$ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On montrerait de même que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Le signe de f se déduit de la règle des signes d'un quotient.

Tableau de variation

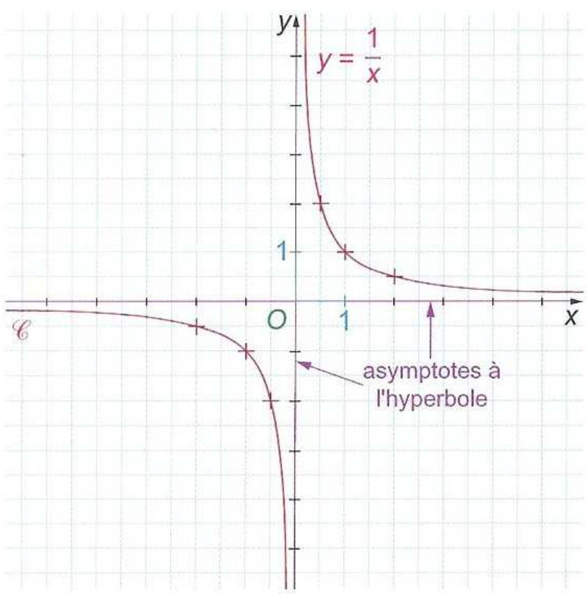


III. Représentation graphique

Tableau de valeurs

x	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	10	4	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

Courbe représentative



Remarque

La courbe représentative de la fonction inverse qui à x associe $\frac{1}{x}$ est appelée une hyperbole.

