CHAPITRE 1 – Arithmétique

I. Diviseurs communs et PGCD de 2 nombres entiers

Définition

Soient a et b 2 nombres entiers non nuls.
On dit qu'un nombre entier k non nul est un diviseur commun de a et b lorsque k est un diviseur de a et aussi un diviseur de b.

Exemple

$24 = 6 \times 4$. Donc 4 est un diviseur de 24.
$36 = 9 \times 4$. Donc 4 est aussi un diviseur de 36.
Par conséquent, 4 est un diviseur commun de 24 et 36.

Définition

Soient a et b 2 nombres entiers non nuls.
On appelle PGCD de a et b, et on note PGCD(a, b), le plus grand diviseur commun de a et b.

Exemples

La liste des diviseurs de 24 est : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
La liste des diviseurs de 36 est : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.
Le plus grand diviseur commun de 24 et 36 est donc 12.
PGCD(24, 36) = 12.

La liste des diviseurs de 10 est : 1, 2, 5, 10.
La liste des diviseurs de 9 est : 1, 3, 9.
Le plus grand diviseur commun de 9 et 10 est donc 1.
PGCD(9, 10) = 1.

Propriétés

Soient a et b 2 nombres entiers non nuls.
1) PGCD(a, a) = a.
2) PGCD(a, b) = PGCD(b, a).
3) Si b est un diviseur de a, alors PGCD(a, b) = b.

Démonstrations

1) a est un diviseur de a (évident car a = 1 × a).
   Il n'existe pas de diviseur de a plus grand que a.
   Donc a est le plus grand diviseur de a.
   Par conséquent PGCD(a, a) = a.

2) Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun de a et b.
   C'est le plus grand diviseur de a et de b.
   C'est donc aussi le plus grand diviseur de b et de a.
   Par conséquent, PGCD(a, b) = PGCD(b, a).

3) Supposons que b soit un diviseur de a.
   On sait aussi que b est un diviseur de b.
   Donc b est un diviseur commun de a et b.
   Par ailleurs, b est le plus grand diviseur de b.
   Donc b est bien le plus grand diviseur commun de a et b.
   Par conséquent, PGCD(a, b) = b.

Exemples

1) PGCD(12, 12) = 12.

2) PGCD(24, 36) = 12 = PGCD(36, 24).

3) PGCD(12, 36) = 12 car 12 est un diviseur de 36 (36 = 12 × 3).

II. PGCD par l'algorithme des soustractions successives

Propriété

Soient a et b 2 nombres entiers non nuls tels que a > b.
PGCD(a, b) = PGCD(b, a – b).

Algorithme des soustractions successives

Pour calculer PGCD(a, b), on utilise la propriété ci-dessus plusieurs fois, jusqu'à obtenir un PGCD facile à calculer.

Exemples

Calculer PGCD(54, 32).

54 – 32 = 22 donc PGCD(54, 32) = PGCD(32, 22).
32 – 22 = 10 donc PGCD(32, 22) = PGCD(22, 10).
22 – 10 = 12 donc PGCD(22, 10) = PGCD(10, 12) = PGCD(12, 10).
12 – 10 = 2 donc PGCD(12, 10) = PGCD(10, 2).
2 est un diviseur de 10 donc PGCD(10, 2) = 2.
Par conséquent, PGCD(54, 32) = PGCD(10, 2) = 2.

Calculer PGCD(117, 91).

117 – 91 = 26 donc PGCD(117, 91) = PGCD(91, 26).
91 – 26 = 65 donc PGCD(91, 26) = PGCD(26, 65) = PGCD(65, 26).
65 – 26 = 39 donc PGCD(65, 26) = PGCD(26, 39) = PGCD(39, 26).
39 – 26 = 13 donc PGCD(39, 26) = PGCD(26, 13).
26 – 13 = 13 donc PGCD(26, 13) = PGCD(13, 13).
Par conséquent, PGCD(117, 91) = PGCD(13, 13) = 13.

III. PGCD par l'algorithme d'Euclide

Propriété

Soient a et b 2 nombres entiers non nuls tels que $a > b$.
Si b n'est pas un diviseur de a, alors PGCD(a, b) = PGCD(b, r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Algorithme d'Euclide (ou algorithme des divisions successives)

Pour calculer PGCD(a, b), on utilise la propriété ci-dessus plusieurs fois, jusqu'à obtenir un PGCD facile à calculer.

Exemples

Calculer PGCD(54, 32).

$54 = 1 \times 32 + 22$ donc PGCD(54, 32) = PGCD(32, 22).
$32 = 1 \times 22 + 10$ donc PGCD(32, 22) = PGCD(22, 10).
$22 = 2 \times 10 + 2$ donc PGCD(22, 10) = PGCD(10, 2).
$10 = 5 \times 2 + 0$. 2 est donc un diviseur de 10.
Par conséquent, PGCD(54, 3é) = PGCD(10, 2) = 2.

Calculer PGCD(117, 91).

$117 = 1 \times 91 + 26$ donc PGCD(117, 91) = PGCD(91, 26).
$91 = 3 \times 26 + 13$ donc PGCD(91, 26) = PGCD(26, 13).
$26 = 2 \times 13 + 0$. 13 est donc un diviseur de 26.
Par conséquent, PGCD(117, 91) = PGCD(26, 13) = 13.

Remarque

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul.

IV. Nombres premiers entre eux

Définition

Soient a et b 2 nombres entiers non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux lorsque PGCD(a, b) = 1.

Exemples

PGCD(9, 10) = 1 donc 9 et 10 sont premiers entre eux.
PGCD(9, 18) = 9 donc 9 et 18 ne sont pas premiers entre eux.

Méthode

Pour montrer que 2 nombres ne sont pas premiers entre eux, il suffit de trouver un diviseur commun des 2 nombres (au moyen des critères de divisibilité classiques, par exemple) qui soit plus grand que 1.
Pour montrer que 2 nombres sont premiers entre eux, il faut calculer son PGCD et vérifier que celui-ci est égal à 1.

Exemples

534 et 27 sont ils premiers entre eux ? Justifier.

$5 + 3 + 4 = 12$ or 12 est dans la table des 3 donc 534 est divisible par 3.
$2 + 7 = 9$ or 9 est dans la table des 3 donc 27 est divisible par 3.
3 est donc un diviseur commun 534 et à 27 : PGCD(534, 27) $\neq$ 1.
534 et 27 ne sont pas premiers entre eux.

56 et 81 sont ils premiers entre eux ? Justifier.

$81 = 1 \times 56 + 25$. Donc PGCD(81, 56) = PGCD(56, 25).
$56 = 2 \times 25 + 6$. Donc PGCD(56, 25) = PGCD(25, 6).
$25 = 4 \times 6 + 1$. Donc PGCD(25, 6) = PGCD(6, 1).
Or PGCD(6, 1) = 1. Donc PGCD(81, 56) = 1.
Par conséquent, 81 et 56 sont premiers entre eux.

V. Fractions irréductibles

Définition

On dit qu'une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateurs sont premiers entre eux.

Exemples

PGCD(13, 18) = 1 donc 13 et 18 sont premiers entre eux.
$\frac{13}{18}$ et $\frac{18}{13}$ sont donc des fractions irréductibles.

PGCD(24, 36) = 12 donc 24 et 36 ne sont pas premiers entre eux.
$\frac{24}{36}$ et $\frac{36}{24}$ ne sont donc des fractions irréductibles.

Application

Expliquer pourquoi la fraction $\frac{124}{213}$ est irréductible.

Pour montrer que $\frac{124}{213}$ est irréductible, on doit prouver que PGCD (124, 213) = 1.

Calcul de PGCD (124, 213) au moyen de l'algorithme d'Euclide :

$213 = 1 \times 124 + 89$	PGCD (213,124)= PGCD (124, 89).
$124 = 1 \times 89 + 35$.	PGCD (124, 89) = PGCD (89, 35).
$89 = 2 \times 35 + 19$.	PGCD (89, 35) = PGCD (35, 19).
$35 = 1 \times 19 + 16$.	PGCD (35, 19) = PGCD (19, 16).
$19 = 1 \times 16 + 3$.	PGCD (19, 16) = PGCD (16, 3).
$16 = 5 \times 3 + 1$.	PGCD (16, 3) = PGCD (3, 1).
$3 = 3 \times 1 + 0$.	PGCD (3, 1) = 1.

Donc PGCD (124, 213) = 1.
$\frac{124}{213}$ est donc une fraction irréductible.

Remarque

Dire qu'une fraction est irréductible revient à dire qu'on ne peut plus la simplifier.

Méthode

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, on la simplifie par PGCD (a, b).

Exemple
PGCD(24, 36) = 12.

$\frac{24}{36} = \frac{12 \times 2}{12 \times 3} = \frac{2}{3}$.
$\frac{2}{3}$ est une fraction irréductible.

Application
Rendre irréductible le quotient $\frac{126}{75}$.

Calcul de PGCD (126, 75) au moyen de l'algorithme d'Euclide :

$126 = 1 \times 75 + 51$.	PGCD (126, 75) = PGCD (75, 51).
$75 = 1 \times 51 + 24$.	PGCD (75, 51) = PGCD (51, 24).
$51 = 2 \times 24 + 3$.	PGCD (51, 24) = PGCD (24, 3).
$24 = 8 \times 3 + 0$.	PGCD (24, 3) = 3.

PGCD (126, 75) = 3.
Donc PGCD (126, 75) $\neq$ 1.
Par conséquent, la fraction $\frac{126}{75}$ n'est pas irréductible.
Pour rendre $\frac{126}{75}$ irréductible, on la simplifie par PGCD (126, 75), donc par 3.

$\frac{126}{75} = \frac{3 \times 42}{3 \times 25} = \frac{42}{25}$
$\frac{42}{25}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{126}{75}$.

Remarque

Une fraction est ainsi irréductible quand on ne peut plus la simplifier.

VI. Utiliser le PGCD dans un problème

Exemple
Un confiseur répartit 301 caramels et de 172 chocolats. Il choisit de les répartir dans des sachets identiques.
1) Calculer le nombre maximal de sachets réalisables.
2) Calculer dans ce cas le nombre de caramels et le nombre de chocolats contenus dans chaque sachet.

1) Les sachets devant être identiques, le nombre de sachets doit être un diviseur commun de 301 et de 172.
   Le nombre maximal de sachets est donc le plus grand diviseur commun de 301 et de 172, soit PGCD (301, 172).

   Calcul de PGCD (301, 172) au moyen de l'algorithme d'Euclide :

   $301 = 1 \times 172 + 129$ PGCD (301, 172) = PGCD (172, 129).
   $172 = 1 \times 129 + 43$ PGCD (172, 129) = PGCD (129, 43).
   $129 = 3 \times 43 + 0$ PGCD (129, 43) = 43.

   Donc PGCD (301, 172) = 43.

   Le nombre maximal de sachets réalisables est donc 43.

2) Le confiseur répartit 301 caramels et 172 chocolats dans 43 sachets identiques.
   $301 : 43 = 7$.
   $172 : 43 = 4$.

   Chaque sachet contient dans ce cas 7 caramels et 4 chocolats.