

CHAPITRE 3 – Découvrir les nombres en écriture fractionnaire (nombres rationnels)

I. Vocabulaire

Définition

Soient a et b 2 nombres avec $b \neq 0$.

Le quotient de a par b ($a : b$) est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

$\frac{a}{b}$ est appelée écriture fractionnaire du quotient de a par b.

Pour cette écriture, a est le numérateur et b est le dénominateur.

Exemple

$\frac{2,5}{5}$ est une écriture fractionnaire (correspondante au nombre 0,5).

Définition

Si le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire sont des entiers, alors cette écriture est une fraction.

Exemples

$\frac{2,5}{5}$ est une écriture fractionnaire, mais pas une fraction.

$\frac{1}{2}$ est une écriture fractionnaire, mais aussi une fraction.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

Remarque 1

- Tout nombre décimal peut toujours s'écrire comme une fraction décimale (fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000...).
- Inversement, toutes les écritures fractionnaires n'admettent pas d'écriture décimale.

Exemples

- $12,6 = \frac{126}{10}$ (ou $\frac{1260}{100}$) $500,737 = \frac{500737}{1000}$
- $\frac{1}{3} \approx 0,3333333333$ (valeur approchée) mais $\frac{1}{3} \neq 0,3333333333$

Remarque 2

On ne peut jamais diviser un nombre par 0.
Le dénominateur d'un quotient écrit en écriture fractionnaire ne doit donc jamais être nul.

Exemple

Le nombre en écriture fractionnaire $\frac{5}{0}$ n'existe pas.

Remarque 3

Une écriture fractionnaire peut toujours être vue comme une proportion.

Exemple

Deux cinquièmes des élèves du lycée Stendhal sont externes.

La proportion d'élèves externes est $\frac{2}{5}$.

Cela signifie que, sur 5 élèves du lycée, 2 sont externes.

II. Multiples, diviseurs, critères de divisibilité

A. Multiples et diviseurs

$$48 : 6 = \frac{48}{6} = 8.$$

On dit que 48 est un multiple de 6.

On dit que 6 est un diviseur de 48.

Le nombre 48 est divisible par 6.

B. Critères de divisibilité

Propriétés

- Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (c'est à dire s'il se termine par 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8).
- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.
- Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Exemple

$5 + 2 + 8 = 15$ donc 528 est divisible par 3, mais pas par 9.

III. Egalité de quotients

A. Propriété des quotients égaux

Propriété

Un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Si $b \neq 0$ et $k \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$$

Exemples

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{9 : 3}{6 : 3} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

B. Simplification de fractions

Définition

Simplifier une fraction signifie écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Pour cela, on utilise principalement les tables de multiplication et les critères de divisibilité connus.

Exemples

$$\frac{24}{30} = \frac{3 \times 8}{3 \times 10} = \frac{8}{10} \quad (\text{on a simplifié par } 3).$$

$$\frac{12}{8} = \frac{2 \times 6}{2 \times 4} = \frac{6}{4} \quad (\text{on a simplifié par } 2).$$

Définition

Quand une fraction n'admet plus de simplification, on dit que cette fraction est irréductible.

Exemples

$$\frac{24}{30} = \frac{3 \times 8}{3 \times 10} = \frac{8}{10} = \frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{5} \quad (\text{on a simplifié par } 3, \text{ puis par } 2).$$

$\frac{4}{5}$ est une fraction irréductible.

$$\frac{495}{385} = \frac{5 \times 99}{5 \times 77} = \frac{99}{77} = \frac{11 \times 9}{11 \times 7} = \frac{9}{7}$$

$\frac{9}{7}$ est une fraction irréductible.

IV. Comparaison de nombres en écriture fractionnaire

A. Cas où les dénominateurs sont les mêmes

Propriété

Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même dénominateur, alors le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

Exemples

$$\frac{4}{5} < \frac{7}{5}$$

$$\frac{1,07}{8} > \frac{1,008}{8}$$

$$\frac{9}{11} > \frac{7}{11}$$

B. Cas où les dénominateurs sont différents

Méthode

Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire ayant des dénominateurs différents, on les écrit d'abord avec un même dénominateur (il faut chercher un "dénominateur commun").

Exemple

Comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{12}$.

Les dénominateurs sont 3 et 12 mais 12 est un multiple de 3.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\text{Or } \frac{8}{12} > \frac{7}{12}$$

$$\text{Donc } \frac{2}{3} > \frac{7}{12}$$