

CHAPITRE 5 – Sections Planes de Solides

I. Généralités

Définition

On appelle section d'un solide par un plan, ou section plane d'un solide, la surface plane obtenue lorsque ce solide est coupé par un plan.

Illustration

Figure à insérer.

La section du solide par le plan (P) est le ...

Remarque

Les points de la section plane d'un solide appartiennent à la fois au solide et au plan.

II. Sections planes d'un parallélépipède rectangle

A. Section par un plan parallèle à une face

Propriété

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan **parallèle à une face** est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.

La section d'un cube par un plan **parallèle à une face** est un carré de mêmes dimensions que cette face.

Illustration

Figure à insérer (Phare p 271 haut gauche).

Le plan (P) est parallèle à la face BFGC.
La section est le rectangle IJKL avec $IJ = BC$ et $IL = BF$.

Figure à insérer.

Le plan (P) est parallèle à la face ...
La section est le carré ... avec ...

B. Section par un plan parallèle à une arête

Propriété

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan **parallèle à une arête** est un rectangle.

La section d'un cube par un plan **parallèle à une arête** est un rectangle.

Illustration

Figure à insérer (Phare p 271 haut droit).

Le plan (P) est parallèle à l'arête [AE].
La section est le rectangle RSTV avec $ST = AE$.

Figure à insérer (?).

Le plan (P) est parallèle à l'arête ...
La section est le carré ... avec ...

III. Sections planes d'un cylindre de révolution

A. Section par un plan perpendiculaire à son axe

Propriété

La section d'un cylindre de révolution par un plan **perpendiculaire à son axe** est un disque de même rayon que la base.

Illustration

Figure à insérer (Phare p 271 bas gauche).

Le plan (P) est perpendiculaire à l'axe (OO').
La section est le disque de centre I et de rayon r.

B. Section par un plan parallèle à son axe

Propriété

La section d'un cylindre de révolution par un plan **parallèle à son axe** est un rectangle dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre.

Illustration

Figure à insérer (Phare p 271 bas droite).

Le plan (P) est parallèle à l'axe (OO').

La section est le rectangle IJKL avec $JK = OO'$ (hauteur du cylindre).

IV. Section plane d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

Propriété

La section d'un cône de révolution par un plan **parallèle à la base** est un disque.

Illustration

Figure à insérer (Phare p 272 bas droite).

(C) est un cône de révolution de sommet S et de base le disque (D) de centre O.

Le plan (P) est parallèle à la base.

La section est le disque (D') de centre I.

Le disque (D') est une réduction du disque (D) de rapport $\frac{SI}{SO}$.

V. Section plane d'une pyramide par un plan parallèle à la base

Propriété

La section d'une pyramide par un plan **parallèle à la base** est un polygone de même nature que sa base.

Illustration

Figure à insérer (Phare p 272 bas gauche).

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD.

Le plan (P) est parallèle à la base.

La section est le carré IJKL.

Le carré IJKL est une réduction du carré ABCD de rapport $\frac{SO'}{SO}$.

VI. Section plane d'une sphère

A. Généralités

Propriété

La section d'une sphère par un plan est un cercle (éventuellement réduit à un seul point).

Illustration

Figures avec commentaires à insérer
(Dimathème p 259 milieu : 2 figures).

Remarque 1

Dans les 2 figures ci-dessus, la longueur OA est appelée distance du plan (P) au centre O de la sphère.

Remarque 2

Quand la distance du plan (P) au centre O de la sphère est supérieure au rayon de la sphère, alors le plan ne coupe pas la sphère.

B. Calcul du rayon du cercle d'intersection connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère

Sur la figure ci-dessous :

La sphère a pour centre O et pour rayon 4 cm.

Le plan (P) est perpendiculaire à (OA) au point A.

B est un point de la section de la sphère par la plan (P).

(OA) est perpendiculaire à (AB).

La distance du plan (P) à la sphère est de 3 cm.

Déterminer la nature exacte de la section de la sphère par le plan et calculer la longueur AB.

Figure à insérer (Dimathème page 263).

D'après le cours, la nature exacte de la section de la sphère par le plan (P) est le cercle de centre A et de rayon AB.

Comme B est un point de la sphère, $OB = 4$ cm.

Comme la distance du plan à la sphère est de 3 cm, $OA = 3$ cm.

On sait que le triangle OAB est rectangle en A.

L'hypoténuse est [OB].

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OB^2 = OA^2 + AB^2.$$

On remplace :

$$4^2 = 3^2 + AB^2$$

$$16 = 9 + AB^2$$

$$AB^2 = 16 - 9 = 7.$$

$$\text{Donc } AB = \sqrt{7} \text{ cm.}$$

C. Grands cercles d'une sphère

Définition

La section d'une sphère par un plan passant par le centre de la sphère est appelé grand cercle de la sphère.

Illustration

Figure à insérer (Dimathème p 259 bas).

Sur la figure ci-dessus :

Le plan (P) passe par le centre O de la sphère.

La section de la sphère par le plan (P) est donc le grand cercle de centre O tracé en rouge.

Propriétés

- 1) Le centre d'un grand cercle est le même que celui de la sphère.
- 2) Tous les grands cercles ont le même rayon, celui de la sphère.