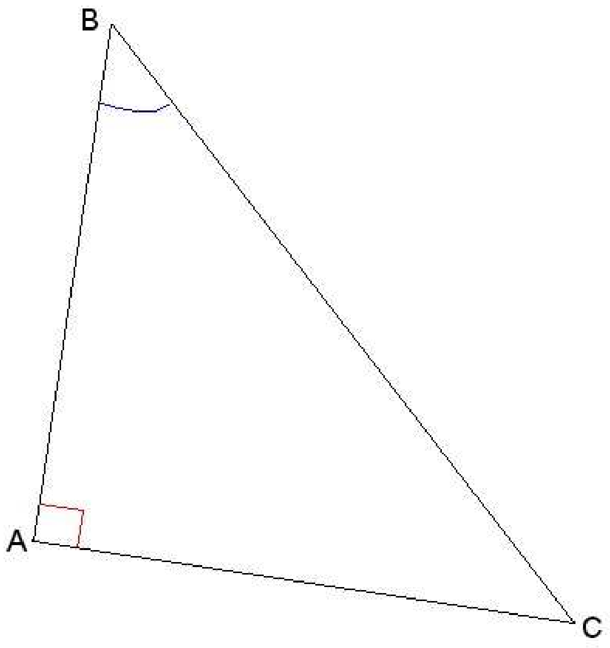
CHAPITRE 6 – Trigonométrie

I. Vocabulaire dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A.



L'hypoténuse de ce triangle rectangle est le côté [BC].

L'angle aigu $\widehat{ABC}$ se note aussi plus simplement $\widehat{B}$.

Le côté adjacent à l'angle aigu $\widehat{ABC}$ est le côté [AB].

Le côté opposé à l'angle aigu $\widehat{ABC}$ est le côté [AC].

II. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

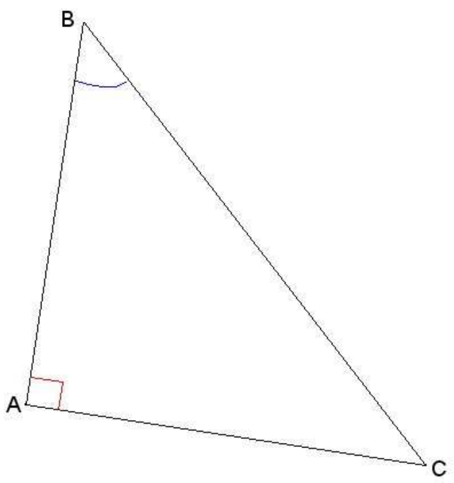
Définition

Dans un triangle rectangle, on définit :

1) le cosinus d'un angle aigu par : $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

2) le sinus d'un angle aigu par : $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

3) la tangente d'un angle aigu par : $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}$



Hypothèses

ABC est un triangle rectangle en A.

Conclusion

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$ $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$ $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

III. Trigonométrie et utilisation de la calculatrice

A. Préambule

Avant d'utiliser la calculatrice pour faire des calculs liés au cosinus, au sinus ou à la tangente, il faut mettre la calculatrice en mode degré.

Sur les "TI", on utilisera les touches $\boxed{\text{2nd}}$ et $\boxed{\text{DR}}$.
Sur les "CASIO", on utilisera les touches $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ et $\boxed{1}$

B. Détermination du cosinus, du sinus, ou de la tangente d'un angle aigu qu'on connaît

Exemple
Déterminer une valeur approchée à 0,01 près du cosinus (respectivement du sinus ou de la tangente) de 55°.

1. On vérifie que la calculatrice est en mode DEGRE.
2. Selon les modèles de calculatrice, on tape $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{cos}}$ (respectivement $\boxed{\text{sin}}$ ou $\boxed{\text{tan}}$) ou $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$.
3. La calculatrice affiche $\boxed{0.573576436}$
4. On déduit que cos (55°) ≈ 0,57.

C. Détermination d'un angle aigu dont on connaît le cosinus

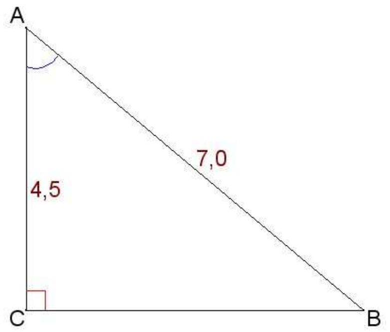
Exemple
On donne sin $\widehat{FEG} = \dfrac{7}{11}$. Déterminer l'arrondi au degré près de $\widehat{FEG}$.

1. On vérifie que la calculatrice est en mode DEGRE.
2. Selon les modèles de calculatrice, on tape $\boxed{7}$ $\boxed{:}$ $\boxed{11}$ $\boxed{=}$ puis $\boxed{\text{shift}}$ (ou $\boxed{\text{2nd}}$ ou $\boxed{\text{inv}}$) $\boxed{\text{sin}}$ ou $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{7}$ $\boxed{:}$ $\boxed{11}$ $\boxed{)}$.
3. La calculatrice affiche $\boxed{\text{A insérer}}$
4. On déduit que $\widehat{FEG}$ ≈ A insérer°.

IV. Détermination de la mesure d'un angle

A. Exemple 1

Soit un triangle ABC rectangle en C.
On donne : AC = 4,5 cm. AB = 7,0 cm.
Calculer $\widehat{BAC}$ et arrondir au ° près.



On connait le côté adjacent et l'hypoténuse. On cherche l'angle.
Donc on utilise le cosinus.

On sait que le triangle ABC est rectangle en C.

Donc : $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$.

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB}$.

On remplace : $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{4,5}{7}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}(\dfrac{4,5}{7})$ (valeur exacte)

$\widehat{BAC} \approx 50°$ (valeur arrondie au ° près)

B. Exemple 2

Soit un triangle ABC rectangle en C.
On donne : AC = 4,5 cm. BC = 4 cm.
Calculer $\widehat{BAC}$ et arrondir au ° près.

Figure à insérer.

On connait le côté opposé et le côté adjacent. On cherche l'angle.
Donc on utilise la tangente.

On sait que le triangle ABC est rectangle en C.

Donc : $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{BAC}}$.

$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$.

On remplace : $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{4}{4{,}5}$

$\widehat{BAC} = \tan^{-1}(\dfrac{4}{4{,}5})$ (valeur exacte)

$\widehat{BAC} \approx$ à insérer ° (valeur arrondie au ° près)

V. Détermination d'une longueur

A. Exemple 1

Soit un triangle EFG rectangle en F.
On donne : FG = 3,8 cm. $\widehat{FEG}$ = 22°.
Calculer EG et arrondir au centième.

Figure à insérer.

On connait l'angle et le côté opposé. On cherche l'hypoténuse.
Donc on utilise le sinus.

On sait que le triangle EFG est rectangle en F.

Donc : $\sin \widehat{FEG} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{FEG}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}.$

$\sin \widehat{FEG} = \frac{FG}{EG}.$

On remplace : $\frac{\sin(22°)}{1} = \frac{3{,}8}{EG}$

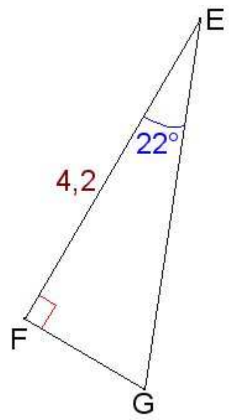
$EG = \frac{3{,}8 \times 1}{\sin(22°)}$

$EG = \frac{3{,}8}{\sin(22°)}$ (valeur exacte)

$EG \approx$ à insérer cm (valeur arrondie au centième)

B. Exemple 2

Soit un triangle EFG rectangle en F.
On donne : EF = 4,2 cm. $\widehat{FEG}$ = 22°.
Calculer FG et arrondir au centième.



On connait l'angle et le côté adjacent. On cherche le côté opposé.
Donc on utilise la tangente.

On sait que le triangle EFG est rectangle en F.

Donc : $\tan \widehat{FEG} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{FEG}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{FEG}}$.

$\tan \widehat{FEG} = \dfrac{FG}{EF}$.

On remplace : $\dfrac{\tan(22°)}{1} = \dfrac{FG}{4{,}2}$

$EG = \dfrac{4{,}2 \times \tan(22°)}{1}$

$EG = 7 \times \tan(22°)$ (valeur exacte)

$EG \approx$ à insérer cm (valeur arrondie au centième)

VI. Propriétés et relations trigonométriques

Relations trigonométriques

On appelle x la mesure en degré d'un angle aigu.
Quelle que soit la valeur de x, on a :

1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
2) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

Démonstrations

1) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} / \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \times \dfrac{\text{longueur de l'hypoténuse}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé} \times \text{longueur de l'hypoténuse}}{\text{longueur de l'hypoténuse} \times \text{longueur du côté adjacent}}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}} = \tan x.$

2) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 =$

$\left(\dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}\right)^2 + \left(\dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}\right)^2 =$

$\dfrac{(\text{longueur du côté adjacent})^2}{(\text{longueur de l'hypoténuse})^2} + \dfrac{(\text{longueur du côté opposé})^2}{(\text{longueur de l'hypoténuse})^2} =$

$\dfrac{(\text{longueur du côté adjacent})^2 + (\text{longueur du côté opposé})^2}{(\text{longueur de l'hypoténuse})^2}$

Or, d'après le théorème de Pythagore, les définitions trigonométriques ne s'appliquant que dans un triangle rectangle :
(longueur du côté adjacent)² + (longueur du côté opposé)² = (longueur de l'hypoténuse)²

D'où : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \dfrac{(\text{longueur de l'hypoténuse})^2}{(\text{longueur de l'hypoténuse})^2} = 1.$

Propriétés

Le cosinus d'un angle aigu est toujours un nombre strictement compris entre 0 et 1.
Le sinus d'un angle aigu est toujours un nombre strictement compris entre 0 et 1.
La tangente d'un angle aigu est toujours un nombre strictement positif.

Démonstration

On définit :

le cosinus d'un angle aigu par : $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

le sinus d'un angle aigu par : $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

Or l'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours le côté le plus long. Donc ces 2 quotients sont nécessairement inférieurs à 1.

De plus, le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont nécessairement positifs car numérateurs et dénominateurs sont forcément positifs en tant que longueurs de segments.

D'où les propriétés énumérées.