CHAPITRE 11 – Systèmes Linéaires de 2 Équations

I. Vocabulaire

Définitions

Un système de 2 équations à 2 inconnues est un ensemble de 2 égalités à 2 membres dans lesquelles on retrouve des nombres et 2 lettres (souvent notées x et y).

Ces lettres sont appelées les inconnues du système de 2 équations.

Résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues x et y consiste à trouver l'ensemble des couples (x ; y) qui vérifient à la fois les 2 égalités du système : ces couples sont alors appelées solutions du système.

Exemple

$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues.

Définition

Tester si un couple de nombres est solution d'un système de 2 équations à 2 inconnues, c'est remplacer les lettres par les nombres dans chacune des 2 équations pour savoir si les 2 égalités sont simultanément vérifiées.

Exemple

Est ce que (2 ; 0) est solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$?

$2 \times 2 + 3 \times 0 = 4 + 0 = 4$. La $1^{\text{ère}}$ équation est donc vérifiée.
$4 \times 2 + 5 \times 0 = 8 + 0 = 8 \neq 10$. La 2^{nde} équation n'est donc pas vérifiée.

Conclusion : (2 ; 0) n'est pas solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$

II. Résolution d'un système par substitution

Principe de la méthode par substitution

1. Au moyen d'une des 2 équations, on exprime y en fonction de x.
2. On réinjecte l'expression de y trouvée précédemment dans la 2nde équation qui ne comporte alors plus qu'une seule inconnue : x.
3. On résout cette équation à 1 inconnue pour trouver la valeur de x.
4. On utilise l'expression de y trouvée en 1. pour déduire la valeur de y.
5. On vérifie le couple (x ; y) trouvé et on conclut.

Remarque : la méthode par substitution convient bien lorsque le coefficient devant une des inconnues au moins est égal à 1 ou – 1.

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4x + 3y = 32 \end{cases}$.

On choisit la 1ère équation : $3x + y = 2$. Donc $y = -3x + 2$. (1.)

On réinjecte l'expression de y dans la 2nde équation :
$-4x + 3y = 32$.
$-4x + 3(-3x + 2) = 32$. (2.)

On résout :
$-4x - 9x + 6 = 32$.
$-13x = 32 - 6$
$-13x = 26$.
$x = \dfrac{26}{-13} = -2$. (3.)

Avec (1.) : $y = -3x + 2 = -3 \times (-2) + 2 = 6 + 2 = 8$. (4.)

Vérification avec $x = -2$ et $y = 8$:
$3x + y = 3 \times (-2) + 8 = -6 + 8 = 2$. OK pour la 1ère équation.
$-4x + 3y = -4 \times (-2) + 3 \times 8 = 8 + 24 = 32$. OK pour la 2nde équation.

Le couple (– 2 ; 8) est l'unique solution du système. (5.)

III. Résolution d'un système par combinaison

Principe de la méthode par combinaison

1. On multiplie chaque membre de la 1ère équation par un nombre et chaque membre de la 2nde équation par un autre nombre pour obtenir le même coefficient devant une inconnue, par exemple y.
2. On soustrait membre à membre les nouvelles équations afin d'obtenir une 3ème équation qui ne comporte alors plus qu'une inconnue, ici x.
3. On résout cette équation à 1 inconnue pour trouver la valeur de x.
4. On utilise une des 2 équations de départ pour déduire la valeur de y.
5. On vérifie le couple (x ; y) trouvé et on conclut.

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 6x + 5y = 10 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$.

On multiplie la 1ère équation par 3 et la 2nde équation par 5 :

$\begin{cases} 18x + 15y = 30 \\ 20x + 15y = 40 \end{cases}$ (1.)

On soustrait membre à membre les nouvelles équations :

$(18x + 15y) - (20x + 15y) = 30 - 40$

$18x + 15y - 20x - 15y = 30 - 40$

$18x - 20x = 30 - 40$ (2.)

On résout : $-2x = -10$ d'où $x = \dfrac{-10}{-2} = 5$. (3.)

Avec la 1ère équation de départ ($6x + 5y = 10$), on obtient :

$6 \times 5 + 5y = 10$ soit encore $30 + 5y = 10$.

$5y = 10 - 30 = -20$ d'où $y = \dfrac{-20}{5} = -4$. (4.)

Vérification avec $x = 5$ et $y = -4$:

$6x + 5y = 6 \times 5 + 5 \times (-4) = 30 - 20 = 10$. OK pour la 1ère équation.

$4x + 3y = 4 \times 5 + 3 \times (-4) = 20 - 12 = 8$. OK pour la 2nde équation.

Le couple (5 ; – 4) est l'unique solution du système. (5.)

IV. Systèmes et interprétation graphique

Principe de l'interprétation graphique

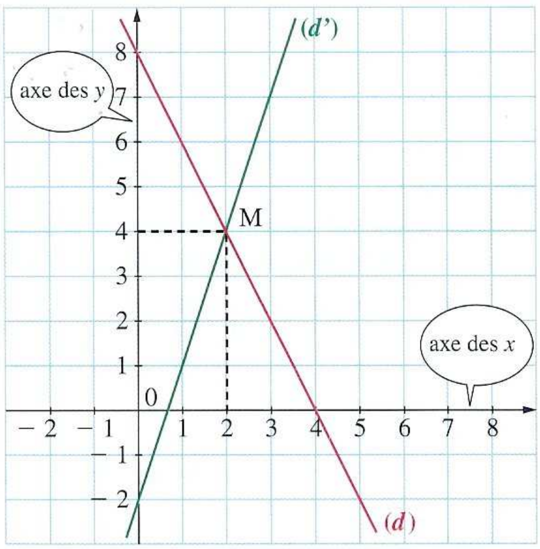
1. Au moyen de la $1^{\text{ère}}$ équation, on exprime y en fonction de x et on remarque que l'expression obtenue est celle d'une $1^{\text{ère}}$ fonction affine.
2. Au moyen de la 2^{nde} équation, on exprime y en fonction de x et on remarque que l'expression obtenue est celle d'une 2^{nde} fonction affine.
3. On représente les 2 fonctions affines dans un même repère, qui forment normalement 2 droites sécantes.
4. Par lecture graphique, on lit les coordonnées du point d'intersection de ces 2 droites.
5. L'unique solution du système est donnée par le couple de coordonnées.

Exemple

Montrer graphiquement que $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -3x + y = -2 \end{cases}$ a pour solution : (2 ; 4).

Avec la $1^{\text{ère}}$ équation : $2x + y = 8$. Donc $y = -2x + 8$. (1.)
Avec la 2^{nde} équation : $-3x + y = -2$. Donc $y = 3x - 2$. (2.)

On représente les 2 fonctions affines f et g telles que $f(x) = -2x + 8$ et $g(x) = 3x - 2$, qui forment 2 droites sécantes (d) et (d') :



(3.)

Par lecture graphique, on lit les coordonnées du point d'intersection M des 2 droites (d) et (d'), qui vérifient à la fois les 2 équations :
Ici, M a pour coordonnées (2 ; 4). (4.)

Le couple (2 ; 4) est l'unique solution du système. (5.)

Remarque

On aurait pu aussi démontrer par le calcul que (2 ; 4) était solution du système.

Si $x = 2$ et $y = 4$:

$2x + y = 2 \times 2 + 4 = 4 + 4 = 8$.
Donc le couple (2 ; 4) vérifie bien la 1ère équation.

$-3x + y = -3 \times 2 + 4 = -6 + 4 = -2$.
Donc le couple (2 ; 4) vérifie bien la 2nde équation.

Conclusion : (2 ; 4) est bien solution du système.

V. Résolution de problèmes et systèmes d'équations

Méthode

Pour résoudre un problème à l'aide d'un système d'équations, il est important de respecter les étapes suivantes :

1. Choix des inconnues.
2. Mise en équations du problème.
3. Résolution du système d'équations.
4. Vérification de la solution trouvée.
5. Réponse au problème posé.

Exemple

Des vacanciers achètent 2 baguettes et 1 croissant dans une boulangerie et ils payent 2,90€. Le lendemain, ils prennent 3 baguettes et 2 croissants dans la même boulangerie pour 4,90€.
Quel est le prix d'une baguette et quel est le prix d'un croissant ?

Soit x le prix en € d'une baguette et y celui d'un croissant (1.)

2 baguettes et 1 croissant coûtent 2,90€ donc $2x + y = 2,90$.
3 baguettes et 2 croissants coûtent 4,90€ donc $3x + 2y = 4,90$.
On obtient donc le système $\begin{cases} 2x + y = 2,9 \\ 3x + 2y = 4,9 \end{cases}$ (2.)

On résout le système par substitution :
Avec la 1ère équation : $y = -2x + 2,9$.
Je réinjecte dans la 2nde équation : $3x + 2(-2x + 2,9) = 4,9$
Donc $3x - 4x + 5,8 = 4,9$ soit encore $-x = 4,9 - 5,8 = -0,9$.
D'où $x = 0,9$ et $y = -2x + 2,9 = -2 \times 0,9 + 2,9 = -1,8 + 2,9 = 1,1$ (3.)

Vérification :
Si $x = 0,90$ et $y = 1,10$, alors 2 baguettes et 1 croissant coûtent bien 2,90€ et 3 baguettes et 2 croissants coûtent bien 4,90€ (4.)

Conclusion : une baguette coûte 0,90€ et un croissant 1,10€. (5.)