CHAPITRE 12 – Inéquations

I. Vocabulaire

Définitions

Une inéquation est une inégalité à 2 membres dans laquelle on retrouve des nombres et une lettre (souvent x).

Cette lettre est appelée l'inconnue de l'inéquation.

Résoudre une inéquation consiste à trouver les valeurs de x qui vérifient l'inégalité : ces valeurs sont alors appelées solutions de l'inéquation.

Exemple

$3x + 1 \leq 40$ est une inéquation.
Le membre de gauche de l'inégalité est $3x + 1$.
Le membre de droite de l'inégalité est 40.

Définition

Tester si un nombre est solution de l'inéquation, c'est remplacer la lettre par le nombre dans chaque membre de l'inéquation pour savoir si l'inégalité (et donc l'inéquation) est vérifiée.

Est ce que 10 est solution de l'inéquation $3x + 1 \leq 40$?
$3 \times 10 + 1 = 30 + 1 = 31$. Or $31 \leq 40$, l'inégalité est donc vérifiée.
Donc 10 est solution de l'inéquation.

Est ce que 14 est solution de l'inéquation $3x + 1 \leq 40$?
$3 \times 14 + 1 = 42 + 1 = 43$. Or $43 \geq 40$, l'inégalité n'est donc pas vérifiée.
Donc 14 n'est pas solution de l'inéquation.

II. Propriétés de base pour la résolution d’inéquations

Propriété 1

On peut ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre d'une inégalité sans changer le sens de cette inégalité.

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ (a, b, c étant des nombres quelconques)
Si $a < b$, alors $a – c < b – c$ (a, b, c étant des nombres quelconques)

Les règles précédentes restent valables avec $>$, $\leq$, $\geq$.

Exemple

$x + 5 < 7$
$x + 5 – 5 < 7 – 5$
$x < 2$.

Remarque

Pour passer une quantité du membre de droite d’une équation vers celui de gauche (ou le contraire), il suffit de changer le signe de cette quantité.

$x + 5 < 7$ revient à $x < 7 – 5$.

Exemple
Résoudre $x + 19 > 22$.

$x > 22 – 19$
$x > 3$.
Les solutions de l’inéquation sont tous les nombres plus grands que 3.

Vérification minimale :
Test avec 2,9 : inégalité fausse. Test avec 3,1 : inégalité vraie.

Propriété 2

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant (ou en divisant) chacun de ses membres par un même nombre positif non nul.

On doit changer le sens d'une inégalité en multipliant (ou en divisant) chacun de ses membres par un même nombre négatif non nul.

a et b sont des nombres quelconques.

Si $a < b$, alors :	$a \times c < b \times c$	$a : c < b : c$	($c > \mathbf{0}$)
Si $a < b$, alors ;	$a \times c > b \times c$	$a : c > b : c$	($c < \mathbf{0}$)

Les règles précédentes restent valables avec $>$, $\leq$, $\geq$.

Exemple 1

$5x \leq 15$.

On divise chacun des membres par le nombre $5 > 0$ donc on ne change pas le sens de l'inégalité.

$\frac{5x}{5} \leq \frac{15}{5}$

$x \leq \frac{15}{5}$

$x \leq 3$.

Exemple 2

Résoudre $-7x \geq 4$.

$-7x \geq 4$

On divise chacun des membres par le nombre $-7 < 0$ donc on change le sens de l'inégalité.

$x \leq \frac{4}{-7}$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $-\frac{4}{7}$.

Vérification minimale :

Test avec -1 : inégalité vraie. Test avec 0 : inégalité fausse.

III. Résolution d'inéquations et représentation graphique des solutions sur un axe gradué

En général, pour résoudre une inéquation, on s'arrange d'abord pour mettre tous les termes en x à gauche et tous les termes sans x à droite, puis on termine la résolution par les règles déjà vues sur les inégalités.

Pour représenter graphiquement les solutions d'une inéquation, on représente un axe gradué en noir sur lequel on repasse en rouge l'ensemble des valeurs solution.

Exemple 1
Résoudre $5x + 7 \geq 3x + 1$.

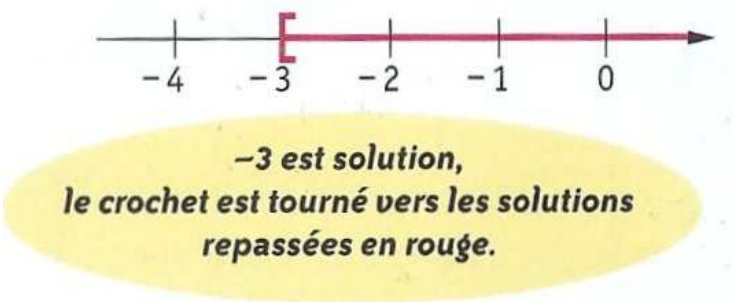
$5x - 3x \geq 1 - 7$ On a fait passer le 3x à gauche, qui devient $-3x$.
On a fait passer le $+7$ à droite, qui devient -7.

$2x \geq -6$

$x \geq \frac{-6}{2}$ On a divisé par $2 > 0$, on ne change pas le sens.

$x \geq -3$.

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -3.



Vérification minimale :
Test avec $-3,1$: inégalité fausse. Test avec $-2,9$: inégalité vraie.

Exemple 2
Résoudre $-2(4x+1) > 2 - 7x$.

$-8x - 2 > 2 - 7x$ On a utilisé la distributivité simple.

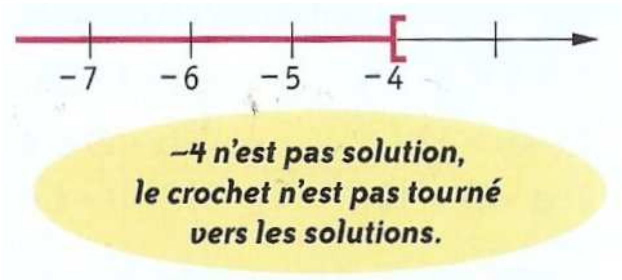
$-8x + 7x > 2 + 2$ On a fait passer le $-7x$ à gauche, qui devient $+7x$.
On a fait passer le -2 à droite, qui devient $+2$.

$-x > 4$

$x < \dfrac{4}{-1}$ On a divisé par $-1 < 0$, on change le sens.

$x < -4$.

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs à -4.



Vérification minimale :
Test avec $-4{,}1$: inégalité vraie. Test avec $-3{,}9$: inégalité fausse.

IV. Résolution de problèmes et inéquations

Méthode

Pour résoudre un problème à l'aide d'une inéquation, il est important de respecter les étapes suivantes :

1. Choix d'une inconnue.
2. Mise en équation.
3. Résolution de l'équation.
4. Vérification de la solution trouvée.
5. Réponse au problème posé.

Exemple
J'ai aujourd'hui 35 ans. Rodolphe, dans 8 ans, aura plus de la moitié de l'âge que j'aurai. Quel peut être l'âge de Rodolphe aujourd'hui ?

Soit x l'âge actuel de Rodolphe (1.)

Dans 8 ans, mon âge sera : $35 + 8 = 43$.
Dans 8 ans, l'âge de Rodolphe sera : $x + 8$.
Donc $x + 8 > 43 : 2$. (2.)

$x + 8 > 21,5$
$x > 21,5 - 8$
$x > 13,5$ (3.)

Vérification :
Si Rodolphe a 13 ans, il en aura 21 dans 8 ans et moi 43. Raté.
Si Rodolphe a 14 ans, il en aura 22 dans 8 ans et moi 43. OK. (4.)

Conclusion : Rodolphe est au moins âgé de 14 ans aujourd'hui. (5.)