CHAPITRE 3 – Les Fonctions

I. Notion de fonction

Définition

Une fonction est un outil mathématique (ou encore un processus) qui à un nombre fait correspondre un autre nombre.

Si f est le nom de la fonction, on dit que f associe à un nombre x un autre nombre appelé f(x).

$f : x \longrightarrow f(x).$

Le nombre f(x) est appelé l'image du nombre x par la fonction f.
Réciproquement, on dit que x est un antécédent de f(x) par la fonction f.

Exemple
On appelle f la fonction qui à un nombre x associe le carré de x.
Alors $f(x) = x^2$.
Par exemple, $f(3) = 3^2 = 9$.
L'image de 3 par la fonction f est donc 9.
Réciproquement, un antécédent de 9 par la fonction f est 3.

Propriété

Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction f, mais un nombre peut avoir plusieurs antécédents.

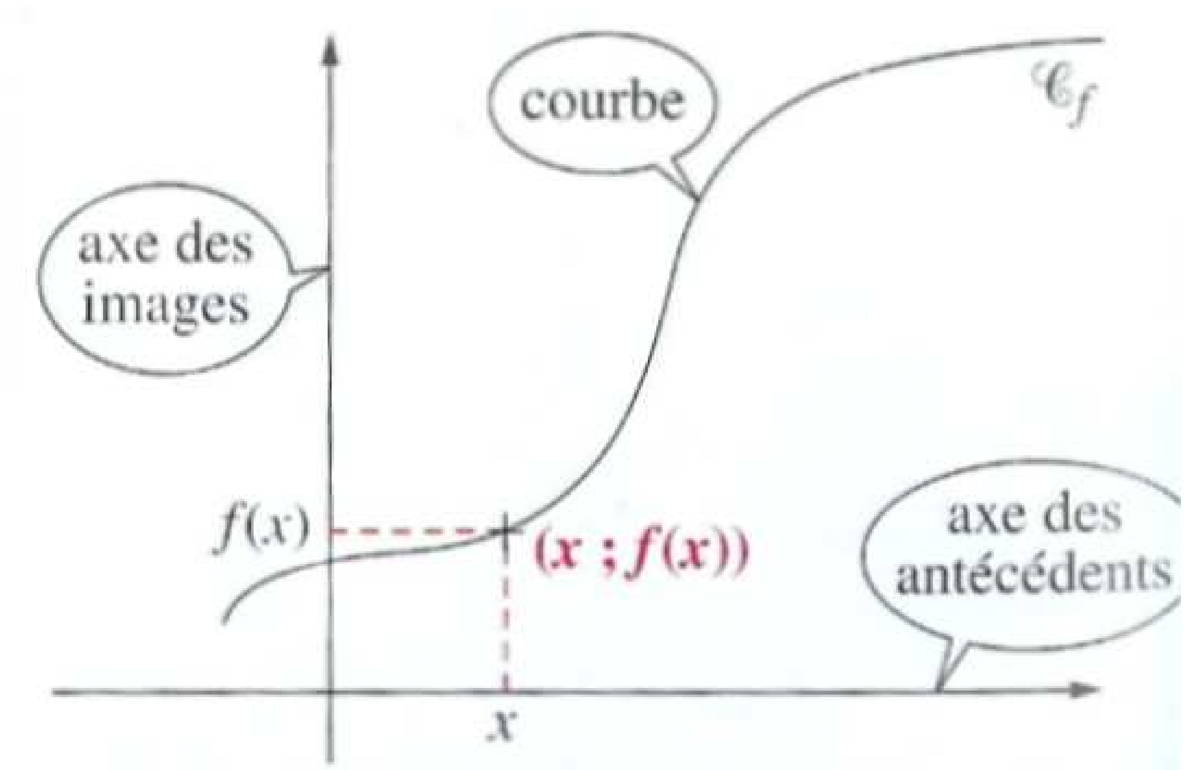
Exemple
Avec l'exemple précédent, $f(-3) = (-3)^2 = 9$.
Donc l'image de – 3 par la fonction f est donc aussi 9.
Un autre antécédent de 9 par la fonction f est – 3.
9 admet donc au moins 2 antécédents : – 3 et 3.

II. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe

Définition

On appelle courbe représentative d'une fonction f dans un repère du plan l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) dans ce repère.
La courbe représentative d'une fonction f est souvent notée Cf ou (Cf).

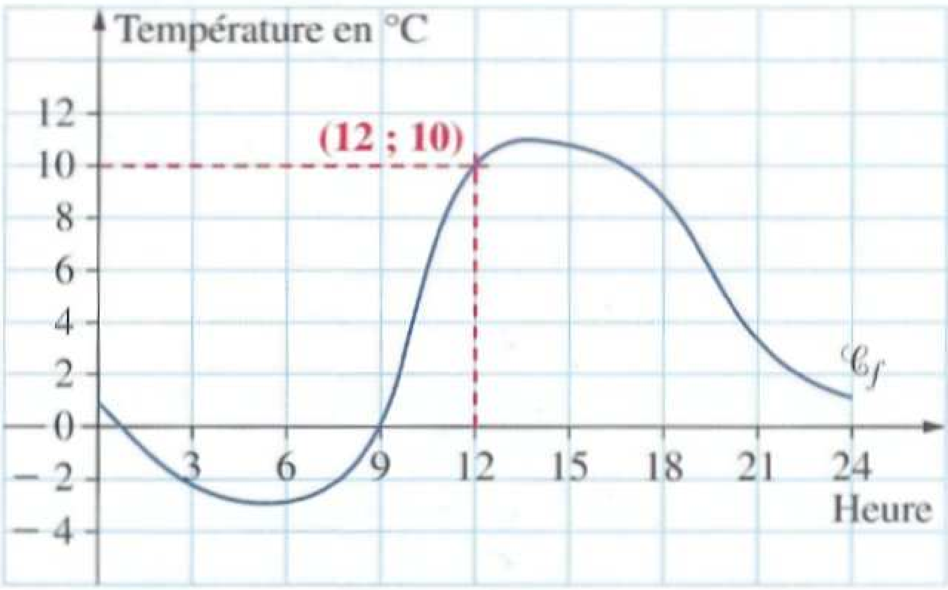
Illustration



Méthode

Pour déterminer l'image d'un nombre α par une fonction f déterminée par une courbe représentative Cf :
1) Je me place au point d'abscisse α sur l'axe des abscisses.
2) Je me déplace verticalement à partir de ce point en traçant des pointillés jusqu'à rencontrer Cf.
3) Je place une petite croix au niveau de ce point d'intersection.
4) Je me déplace horizontalement à partir de ce point en traçant des pointillés jusqu'à rencontrer l'axe des ordonnées.
5) Je lis sur l'axe des ordonnées la valeur de l'image f(α) du nombre α par la fonction f

Exemple
La courbe Cf ci-dessous représente la fonction f qui à une heure du jour, associe la température relevée dans une certaine ville.
Quelle est la température relevée à 12h ?



En appliquant la méthode ci-dessus, l'image du nombre 12 par la fonction f est égal à 10.
On a donc : f(12) = 10.

La température relevée à 12h est de 10 °C.

III. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par un tableau de données

Définition

On appelle tableau de données (ou de valeurs) d'une fonction f un tableau où la 1ère ligne donne des nombres x et la 2nde leurs images f(x).

Une fonction f n'est connue qu'en partie au moyen d'un tableau de valeurs : seules quelques images particulières sont en effet données.

Illustration

x	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
f(x)	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

E

Exemple
Le tableau ci-dessous donne le prix du timbre en euros correspondant à la masse en grammes d'une lettre.

Masse en g	**15**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Prix en €	**0,54**	**0,86**	**0,86**	**1,30**	**1,30**	**2,11**

Quel est le prix du timbre pour une lettre de 30g ? de 50g ?

On appelle f la fonction qui à la masse x (en grammes) d'une lettre, associe le prix f(x) (en euros) du timbre nécessaire.

x	15	30	45	60	90	120
f(x)	0,54	0,86	0,86	1,30	1,30	2,11

L'image de 30 par la fonction f est 0,86. On le note f(30) = 0,86.
Le prix du timbre pour une lettre de 30g est de 0,86 €.
L'image de 50 par la fonction f n'est pas connue.
Le prix du timbre pour une lettre de 50g n'est pas connu.

IV. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une formule

Définition

On appelle expression algébrique d'une fonction f une égalité du type :
f(x) = …
Dans cette égalité, les … représentent une expression mathématique dépendant du nombre x.

Méthode

Pour déterminer l'image d'un nombre α par une fonction f déterminée par une formule, je calcule f(α) en remplaçant tous les x de l'expression algébrique de f par **(**α**)**.

Exemple
On considère la fonction f définie par son expression algébrique :
$f(x) = x^2 + 5x + 6$.
1) Calculer f(– 2).
2) Déterminer l'image de – 3 par la fonction f.
3) En déduire 2 antécédents de 0 par la fonction f.

1) $f(-2) = (-2)^2 + 5 \times (-2) + 6$ Ne pas oublier les parenthèses !
   $f(-2) = 4 - 10 + 6 = 0$.

2) Pour déterminer l'image de (– 3) par f, je calcule f(– 3).

   $f(-3) = (-3)^2 + 5 \times (-3) + 6$ Ne pas oublier les parenthèses !
   $f(-3) = 9 - 15 + 6 = 0$.

   L'image de – 3 par la fonction f est 0.

3) f(– 2) = 0 et f(– 3) = 0.
   Donc 0 admet au moins 2 antécédents par la fonction f : – 2 et – 3.