

CHAPITRE 5 – Puissances

I. Produit et quotient de puissances

Théorème

a est un nombre relatif non nul.
 m et n sont des nombres entiers relatifs.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Démonstration de la première égalité

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= (\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_m \text{ facteurs}) \times (\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n \text{ facteurs}) \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{m+n \text{ facteurs}} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

Exemples

- ✓ $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7.$
- ✓ $(-7)^2 \times (-7)^{-5} = (-7)^{2+(-5)} = (-7)^{2-5} = (-7)^{-3}.$
- ✓ $\frac{6^2}{6^5} = 6^{2-5} = 6^{-3}$
- ✓ $\frac{(-4)^3}{(-4)^{-6}} = (-4)^{3-(-6)} = (-4)^{3+6} = (-4)^9.$

II. Puissances de puissances

Théorème

a est un nombre relatif non nul.
 m et n sont des nombres entiers relatifs.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{(a \times \dots \times a)}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{(a \times \dots \times a)}_{m \text{ fois}} \times \dots \times \underbrace{(a \times \dots \times a)}_{m \text{ fois}} && (n \text{ facteurs}) \\ &= a \times a \times a \times a \times \dots \times a \\ &\quad (m \times n) \text{ facteurs} \\ &= a^{m \times n}. \end{aligned}$$

Exemples

$$\checkmark (9^3)^4 = 9^{3 \times 4} = 9^{12}.$$

$$\checkmark ((-7)^2)^{-5} = (-7)^{2 \times (-5)} = (-7)^{-10}.$$

III. Puissance d'un produit, puissance d'un quotient

Théorème

a et b sont des nombres relatifs non nuls.
n est un nombre entier relatifs.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} (a \times b)^n &= (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b) && (n \text{ facteurs}) \\ &= a \times b \times a \times b \times \dots \times a \times b \\ &= \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{(b \times b \times \dots \times b)}_{n \text{ facteurs}} \\ &= a^n \times b^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b} && (n \text{ facteurs}) \\ &= \frac{a \times a \times \dots \times a}{b \times b \times \dots \times b} && (n \text{ facteurs, au numérateur et au dénominateur}) \\ &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

Exemples

$$\checkmark (5 \times 7)^3 = 5^3 \times 7^3.$$

$$\checkmark (3x)^2 = (3 \times x)^2 = (3)^2 \times x^2 = 9x^2.$$

$$\checkmark \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}.$$