CHAPITRE 7 – Fonctions linéaires

I. Présentation

Définition

Une fonction f est dite linéaire si son expression algébrique est du type :
$f(x) = ax$ pour tout nombre x.
Le nombre a est appelé coefficient de la fonction linéaire.

Exemples

1) On appelle f la fonction qui à un nombre x associe trois fois x.
Alors $f(x) = 3x$. f est la fonction linéaire de coefficient 3.
Par exemple, $f(4) = 3 \times 4 = 12$.
L'image de 4 par la fonction linéaire f est 12.
Un antécédent de 12 par la fonction linéaire f est 4.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x$.
Alors f est la fonction linéaire de coefficient $-\frac{1}{2}$.

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2$.
Alors f n'est pas une fonction linéaire (du type $f(x) = ax^2$ et non ax).

Remarque

Une fonction linéaire f de coefficient a peut être décrite par le processus : « je multiplie par le nombre a ».

Propriété

Tout nombre admet 1 et 1 seul antécédent par une fonction linéaire de coefficient a non nul.

II. Proportionnalité et fonctions linéaires

Propriété

A toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire et une seule.
On dit que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité

Exemple

Dans un marché, des tomates coûtent un prix en euros proportionnel à leur masse en kilos. On donne le tableau suivant :

Masse de tomates en kg	5	20	25
Prix en €	2,5	10	12,5

Le coefficient de proportionnalité est 0,5.

Pour une masse donnée (en kilos) de tomates, il faut donc multiplier cette masse par 0,5 pour obtenir le prix en euros de ces tomates.
Autrement dit, si on achète x kilos de tomates, on paiera $0{,}5 \times x$ euros.

La fonction linéaire f de coefficient 0,5, définie par $f(x) = 0{,}5x$, permet donc de modéliser le prix de vente en € d'une masse de x kilos de tomates.

On peut reprendre le tableau précédent et même l'étendre sous forme de tableau de valeurs de la fonction linéaire f :

x	0	1	3	5	10	15	20	25	30
f(x)	0	0,5	1,5	2,5	5	7,5	10	12,5	15

III. Pourcentages et fonctions linéaires

Propriétés

Prendre p % d'une quantité x est une situation modélisée par la fonction linéaire f définie par $f(x) = \frac{p}{100}x$.
Augmenter une quantité x de p % est une situation modélisée par la fonction linéaire g définie par $g(x) = (1 + \frac{p}{100})x$.
Diminuer une quantité x de p % est une situation modélisée par la fonction linéaire h définie par $h(x) = (1 - \frac{p}{100})x$.

Exemples

1) Prendre 5% d'une quantité x, c'est multiplier x par $\frac{5}{100}$.

   Or $\frac{5}{100} \times x = 0{,}05x$.
   La fonction linéaire f de coefficient 0,05, définie par $f(x) = 0{,}05x$, permet donc de modéliser le fait de prendre 5% d'une quantité x.

2) Augmenter une quantité x de 13%, c'est multiplier x par $(1 + \frac{13}{100})$.

   Or $(1 + \frac{13}{100}) \times x = (1 + 0{,}13) \times x = 1{,}13x$.
   La fonction linéaire g, définie par $g(x) = 1{,}13x$, permet donc de modéliser l'augmentation de 13% d'une quantité x.

3) Diminuer une quantité x de 15%, c'est multiplier x par $(1 - \frac{15}{100})$.

   Or $(1 - \frac{15}{100}) \times x = (1 - 0{,}15) \times x = 0{,}85x$.
   La fonction linéaire h, définie par $h(x) = 0{,}85x$, permet donc de modéliser la diminution de 15% d'une quantité x.

IV. Déterminer par le calcul l'image d'un nombre ou l'antécédent d'un nombre par une fonction linéaire

Méthode

Pour déterminer l'image d'un nombre α par une fonction linéaire f définie par f(x) = ax, je calcule f(α) en remplaçant tous les x de l'expression algébrique de f par **(**α**)**.

Exemple
On considère la fonction linéaire f de coefficient – 7.
Déterminer l'image de – 3 par la fonction f.

Pour déterminer l'image de – 3 par f, je calcule f(– 3).
Comme f est linéaire de coefficient – 7, f(x) = – 7x.
Donc $f(-3) = -7 \times (-3) = 21$.
L'image de – 3 par la fonction f est 21.

Méthode

Pour déterminer l'antécédent d'un nombre β par une fonction linéaire f définie par f(x) = ax, je cherche le nombre x tel que f(x) = β. Par conséquent, je résous l'équation f(x) = β

Exemple
On considère la fonction linéaire f définie par f(x) = – 7x.
Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction f.

Pour déterminer l'antécédent de 2 par f, je résous f(x) = 2.
Or f(x) = – 7x.
– 7x = 2.
$x = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$.

L'antécédent de 2 par la fonction f est $-\frac{2}{7}$.

V. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image

Méthode

Pour déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul α et de son image $f(\alpha)$, il suffit de calculer son coefficient a au moyen de l'égalité $f(\alpha) = a\,\alpha$.

Exemple
f est la fonction linéaire vérifiant $f(5) = 2$.
Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Comme f est une fonction linéaire, f est de la forme $f(x) = ax$.

Il reste à calculer la valeur de a.

Comme on sait que $f(5) = 2$, on a :
$a \times 5 = 2$.
Par conséquent, $a = \frac{2}{5}$.

L'expression algébrique de la fonction f est : $f(x) = \frac{2}{5}x$.

VI. Représenter graphiquement une fonction linéaire

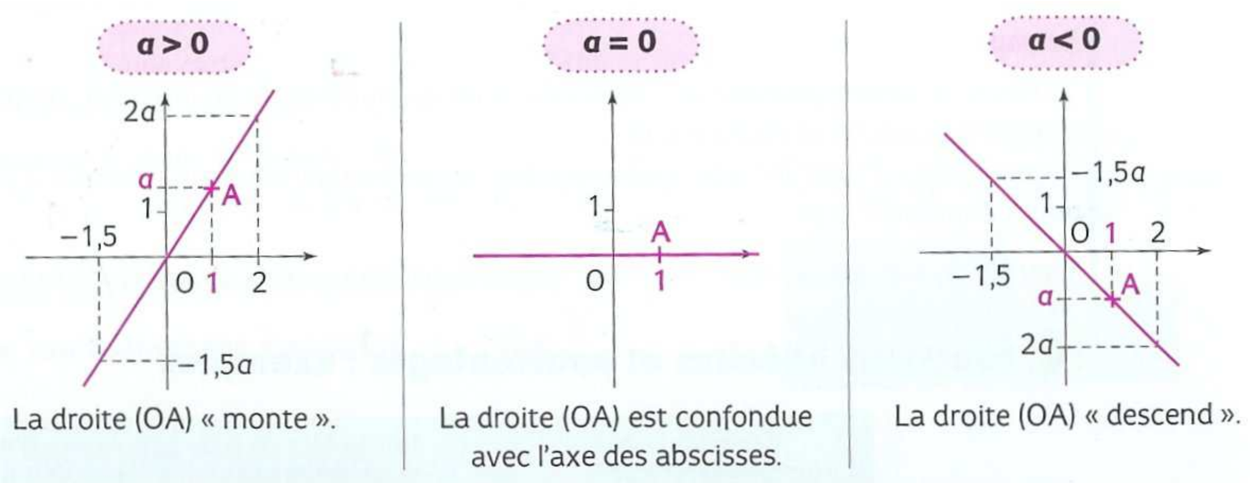
Propriété

La courbe représentative Cf d'une fonction linéaire f de coefficient a est une droite passant par l'origine.

Si a > 0, alors la droite est orientée vers le haut quand on se déplace de la gauche vers la droite.
Si a < 0, alors la droite est orientée vers le haut quand on se déplace de la gauche vers la droite.
Si a = 0, alors la droite est l'axe des abscisses.

Le nombre a est par ailleurs aussi appelé coefficient directeur de la droite.

Illustration



Propriété

La courbe représentative Cf d'une fonction linéaire f de coefficient a passe toujours par le point particulier (1 ; a).
En effet, Cf est l'ensemble des points (x ; f(x)).
Or si x = 1, alors f(x) = f(1) = a × 1 = a.

Méthode

Pour représenter la courbe représentative Cf d'une fonction linéaire f :
1) On place d'abord un 1er point de Cf : le point origine O(0 ; 0).
2) On choisit ensuite un nombre quelconque b et on calcule son image f(b) par la fonction f.
3) On place un 2ème point de Cf : le point B(b ; f(b)).
4) On trace la droite (OB).

Exemple

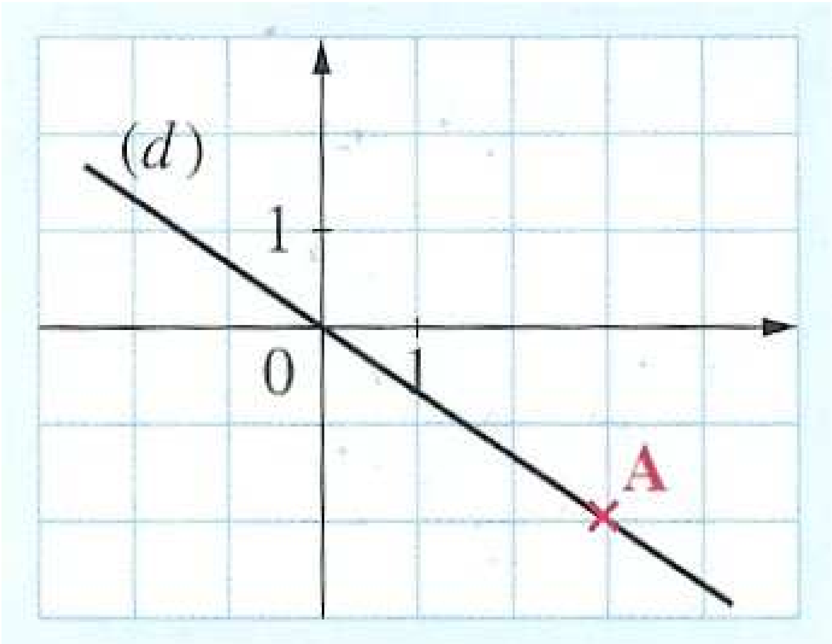
Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x$.

f est du type f(x) = ax (avec $a = -\frac{2}{3}$) donc f est une fonction linéaire.

Par conséquent, sa courbe représentative est une droite qui passe par l'origine O du repère.

De plus, si b = 3 alors $f(b) = -\frac{2}{3} \times 3 = -2$.

Donc Cf passe aussi par le point (3 ; – 2).



VII. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image ou l'antécédent d'un nombre donné

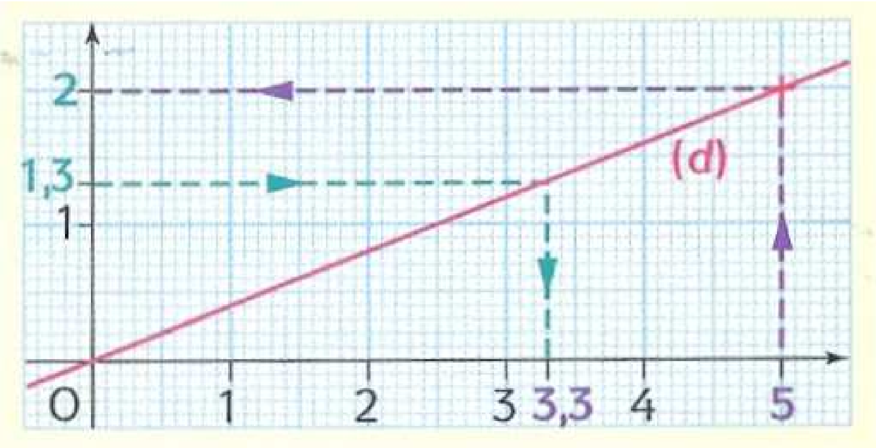
Méthode 1

Pour déterminer l'image d'un nombre α par une fonction linéaire f à partir de sa représentation graphique (d), je pars du point (α ; 0), je me déplace verticalement jusqu'à la droite (d), puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées. Je lis alors la valeur de l'image f(α) sur ce dernier axe.

Méthode 2

Pour déterminer l'antécédent d'un nombre β par une fonction linéaire f à partir de sa représentation graphique (d), je pars du point (0, β), je me déplace horizontalement jusqu'à la droite (d), puis verticalement jusqu'à l'axe des abscisses. Je lis alors la valeur de l'antécédent sur ce dernier axe.

Exemple
La droite (d) est la courbe représentative d'une fonction linéaire f.
Lire graphiquement l'image de 5 et l'antécédent de 1,3 par f.



Par lecture graphique :
1) L'image de 5 est 2.
2) L'antécédent de 1,3 est approximativement 3,3.

