CHAPITRE 8 – Fonctions affines

I. Présentation

Définition

Une fonction f est dite affine si son expression algébrique est du type :
$f(x) = ax + b$ pour tout nombre x (a et b sont 2 nombres)

Exemples

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$.
   f est une fonction affine car du type $ax + b$ avec $a = 3$ et $b = 2$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x + 3}{7}$.

   Alors f est une fonction affine car $f(x) = -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{3}{7}$.

Remarques

1) Une fonction linéaire ($f(x) = ax$) est une fonction affine particulière (avec $b = 0$).
2) Une fonction constante ($f(x) = b$) est une fonction affine particulière (avec $a = 0$).
3) Une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ peut être décrite par le processus : « je multiplie par le nombre a et j'ajoute b».

Propriété

Tout nombre admet 1 et 1 seul antécédent par une fonction affine non constante.

II. Déterminer par le calcul l'image d'un nombre ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine

Méthode

Pour déterminer l'image d'un nombre α par une fonction affine f définie par f(x) = ax + b, je calcule f(α) en remplaçant tous les x de l'expression algébrique de f par **(**α**)**.

Exemple
On considère la fonction affine f telle que f(x) = – 7x + 4.
Déterminer l'image de – 3 par la fonction f.

Pour déterminer l'image de – 3 par f, je calcule f(– 3).
$f(-3) = -7 \times (-3) + 4 = 21 + 4 = 25$.
L'image de – 3 par la fonction f est 25.

Méthode

Pour déterminer l'antécédent d'un nombre β par une fonction affine f définie par f(x) = ax + b, je cherche le nombre x tel que f(x) = β. Par conséquent, je résous l'équation f(x) = β.

Exemple
On considère la fonction linéaire f définie par f(x) = – 7x + 4.
Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction f.

Pour déterminer l'antécédent de 2 par f, je résous f(x) = 2.
$-7x + 4 = 2$.
$-7x = 2 - 4$.
$-7x = -2$.
$x = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$.

L'antécédent de 2 par la fonction f est $\frac{2}{7}$.

III. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images

Méthode

Pour déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres α et β et de leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, il suffit de calculer les nombres a et b en résolvant le système suivant de 2 équations à 2 inconnues (a et b) :

$$\begin{cases} f(\alpha) = a\,\alpha + b \\ f(\beta) = a\,\beta + b \end{cases}$$

Exemple

f est la fonction affine vérifiant $f(-2) = -13$ et $f(3) = 7$.
Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Comme f est une fonction affine, f est de la forme $f(x) = ax + b$.
Il reste à calculer les valeurs de a et de b.

Comme $f(-2) = -13$, $a \times (-2) + b = -13$ soit encore $-2a + b = -13$.
Comme $f(3) = 7$, $a \times 3 + b = 7$ soit encore $3a + b = 7$.

Les nombres a et b vérifient donc le système : $\begin{cases} -2a + b = -13 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$

On peut résoudre ce système par combinaison.
On soustrait membre à membre la $2^{\text{ème}}$ équation à la $1^{\text{ère}}$.
On obtient : $(-2a + b) - (3a + b) = -13 - 7$.
Soit encore : $-2a + b - 3a - b = -20$.
D'où : $-5a = -20$.
Finalement : $a = \dfrac{-20}{-5} = 4$.

On remplace ensuite a par sa valeur dans la $2^{\text{ème}}$ équation :
$3 \times 4 + b = 7$ soit $12 + b = 7$ soit encore $b = 7 - 12 = -5$.
L'expression algébrique de la fonction f est : $f(x) = 4x - 5$.

IV. Représenter graphiquement une fonction affine

Propriété

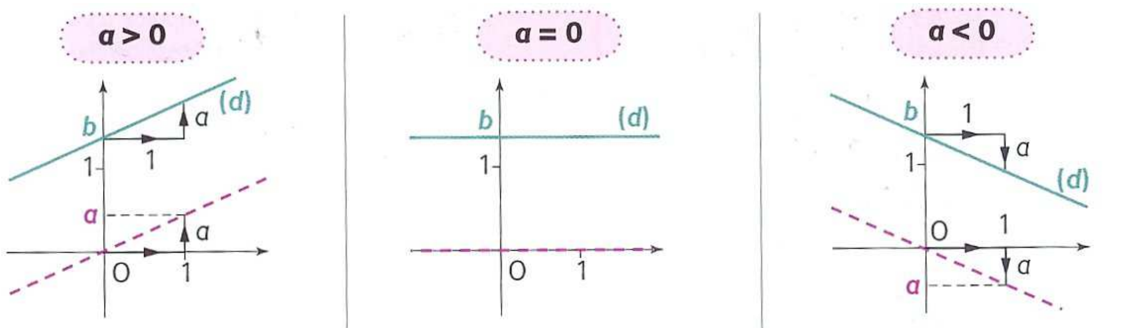
La courbe représentative Cf d'une fonction affine f est une droite.

Si a > 0, alors la droite est orientée vers le haut quand on se déplace de la gauche vers la droite.
Si a < 0, alors la droite est orientée vers le haut quand on se déplace de la gauche vers la droite.
Si a = 0, alors la droite est l'axe des abscisses.

Le nombre a est appelé coefficient directeur de cette droite.
Le nombre b est appelé ordonnée à l'origine de cette droite.

Enfin, les droites qui représentent les fonctions f et g définies par
f(x) = ax + b et g(x) = ax sont parallèles.

Illustration



La droite (d) « monte ».

La droite (d) est parallèle à l'axe des abscisses.

La droite (d) « descend ».

Propriété

La courbe représentative Cf d'une fonction affine f d'expression
f(x) = ax + b   passe toujours par le point particulier (0 ; b).
En effet, Cf est l'ensemble des points (x ; f(x)).
Or si x = 0, alors f(x) = f(0) = a × 0 + b = b.

Méthode

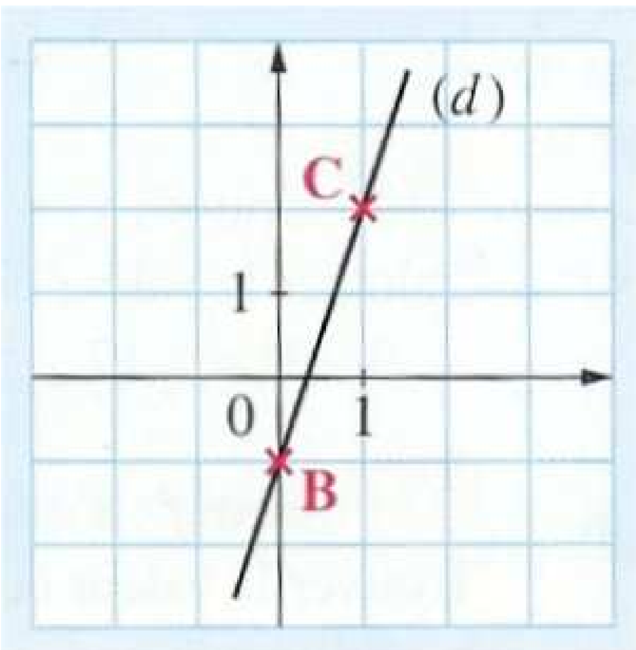
Pour représenter la courbe représentative Cf d'une fonction linéaire f :
1) On place d'abord un 1er point de Cf : le point B(0 ; b).
2) On choisit ensuite un nombre quelconque c et on calcule son image f(c) par la fonction f.
3) On place un 2ème point de Cf : le point C(c ; f(c)).
4) On trace la droite (BC).

Exemple
Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction f définie par f(x) = 3x – 1.

f est du type f(x) = ax + b (avec a = 3 et b = – 1) donc f est une fonction affine.
Par conséquent, sa courbe représentative est une droite.

Comme b = – 1, cette droite passe par le point (0 ; – 1).

De plus, si c = 1 alors f(c) = 3 × 1 – 1 = 3 – 1 = 2.
Donc Cf passe aussi par le point (1 ; 2).



V. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image ou l'antécédent d'un nombre donné

Méthode 1

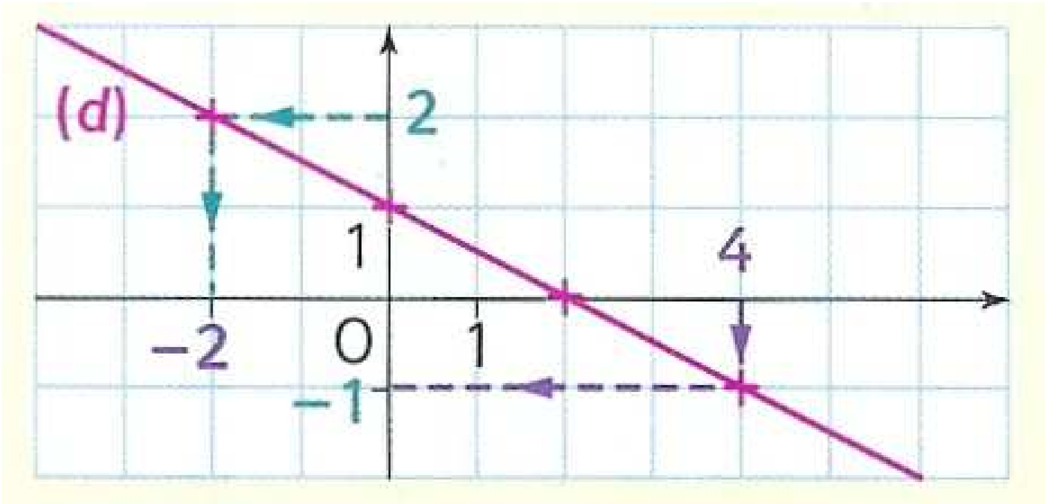
Pour déterminer l'image d'un nombre α par une fonction affine f à partir de sa représentation graphique (d), je pars du point (α ; 0), je me déplace verticalement jusqu'à la droite (d), puis horizontalement jusqu'à l'axe des ordonnées. Je lis alors la valeur de l'image f(α) sur ce dernier axe.

Méthode 2

Pour déterminer l'antécédent d'un nombre β par une fonction linéaire f à partir de sa représentation graphique (d), je pars du point (0, β), je me déplace horizontalement jusqu'à la droite (d), puis verticalement jusqu'à l'axe des abscisses. Je lis alors la valeur de l'antécédent sur ce dernier axe.

Exemple

La droite (d) est la courbe représentative d'une fonction affine f.
Lire graphiquement l'image de 4 et l'antécédent de 2 par f.



Par lecture graphique :
1) L'image de 4 est – 1.
2) L'antécédent de 2 est – 2.

RAF :
Proportionnalité des accroissements et utilisation ?
[a = (f(x2) – f(x1))/(x2 – x1)].

