CHAPITRE 9 – Racines Carrées

I. Racine carrée d'un nombre positif

Définition

On désigne par a un nombre positif ou nul.
On appelle racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut a.
Par conséquent, $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples

- $\sqrt{25}$ est l'unique nombre positif dont le carré est 25.
  Or $5 \geq 0$ et $5^2 = 25$. Donc $\sqrt{25} = 5$.
- De même, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{0} = 0$.
- $\sqrt{-4}$ n'existe pas car $-4 < 0$.

Vocabulaire

Dans une expression du type $\sqrt{c}$:
1) Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé le radical.
2) Le nombre c, qui figure sous le radical, s'appelle le radicande.

Exemples

Dans l'expression $5\sqrt{7}$:
1) Le symbole $\sqrt{\ }$ est le radical.
2) 7 est le radicande.
3) 5 est facteur de la racine carrée donc l'expression peut aussi s'écrire de la façon suivante : $5 \times \sqrt{7}$.

II. Résolution de l'équation $x^2 = a$

Théorème

On désigne par a un nombre.

Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ possède 2 solutions distinctes et opposées :
$\sqrt{a}$ (solution positive) et $-\sqrt{a}$ (solution négative).

Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ possède 1 seule solution : 0.

Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Exemples

Résoudre l'équation $x^2 = 7$.

Comme $7 > 0$, l'équation $x^2 = 7$ possède 2 solutions distinctes et opposées : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.
$S = \{-\sqrt{7} ; \sqrt{7}\}$.

Résoudre l'équation $x^2 = 64$.

Comme $64 > 0$, l'équation $x^2 = 64$ possède 2 solutions distinctes et opposées : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$.
Or $\sqrt{64} = 8$. Donc les 2 solutions sont 8 et -8.
$S = \{-8 ; 8\}$.

Résoudre l'équation $x^2 = 0$.

Comme $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ possède 1 unique solution : 0.
$S = \{0\}$.

Résoudre l'équation $x^2 = -7$.

Comme $-7 < 0$, l'équation $x^2 = -7$ n'admet aucune solution.
$S = \varnothing$. (« ensemble vide »)

III. Règles de calcul avec les racines carrées

A. Racine carrée d'un carré

Propriété

On désigne par a un nombre **positif ou nul**.
Alors $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples

$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$.
$13 = \sqrt{13^2} = \sqrt{169}$.

Remarque

Attention, la propriété ci-dessous est fausse si $a < 0$.
Par exemple, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Donc $\sqrt{(-5)^2} \neq -5$.

B. Racine carrée d'un produit

Propriété

On désigne par a et b 2 nombres positifs ou nuls.
Alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples

$A = \sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = 10$.
$B = \sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$.

C. Racine carrée d'un quotient

Propriété

On désigne par a un nombre positif ou nul et b un nombre positif non nul.
Alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples

$A = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5.$

$B = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$

D. Racine carrée d'une somme ou d'une différence

Remarque

Il n'existe aucune règle pour simplifier une somme ou une différence de racines carrées.
Notamment :
$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général.
$\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ en général.

Exemple

$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$
$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$

Donc $\sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

IV. Carrés parfaits et décomposition d'un entier en facteurs au moyen de carrés parfaits

Définition

On appelle carré parfait un carré d'un nombre entier.

Exemples

$2^2 = 4$ est un carré parfait.
64 est un carré parfait.

Remarque

La liste suivante des carrés parfaits des entiers de 1 à 15 est à connaître parfaitement :
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

Décomposition d'entiers au moyen de carrés parfaits

Certains entiers peuvent facilement se décomposer en un produit de facteurs dont l'un ou plusieurs de ses facteurs sont des carrés parfaits.

Pour ce faire, on peut utiliser les critères de divisibilité connus ou simples (par 4, par 9, par 25) et/ou utiliser une calculatrice pour essayer les divisions par les carrés parfaits.

Exemples

$18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2$.
$192 = 4 \times 48 = 4 \times 4 \times 12 = 4 \times 4 \times 4 \times 3 = 4^2 \times 2^2 \times 3 = 8^2 \times 3$.

847 n'est pas divisible par 2, 3, 4, 5, 9.
Mais à la calculatrice, on remarque que 847 est divisible par 121.
Donc $847 = 121 \times 7 = 11^2 \times 7$.

V. Simplification d'expressions avec des racines carrées

Méthode

Dans une expression avec des radicaux, on essaye souvent de rendre les radicandes les plus petits possibles.

Pour ce faire :

1) On essaye de décomposer chaque radicande en un produit comportant un ou plusieurs carrés parfaits.
2) On utilise la propriété de calcul de la racine carrée d'un produit.

Exemples

Mettre $\sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un nombre entier positif.

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Mettre $\sqrt{7500}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un nombre et b un nombre entier positif le plus petit possible.

$7500 = 25 \times 300 = 25 \times 100 \times 3$.

$\sqrt{7500} = \sqrt{25 \times 100 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10 \times 5 \times \sqrt{3} = 50\sqrt{3}$.

Ecrire $A = 3\sqrt{24} - 2\sqrt{294} - \sqrt{150}$ sous la forme $a\sqrt{6}$ avec a entier.

L'énoncé invite à décomposer chaque radicande avec l'entier 6.

$A = 3\sqrt{24} - 2\sqrt{294} - \sqrt{150}$
$A = 3\sqrt{4 \times 6} - 2\sqrt{49 \times 6} - \sqrt{25 \times 6}$
$A = 3\sqrt{4} \times \sqrt{6} – 3\sqrt{49} \times \sqrt{6} – \sqrt{25} \times \sqrt{6}$
$A = 3 \times 2 \times \sqrt{6} – 3 \times 7 \times \sqrt{6} – 5 \times \sqrt{6}$
$A = 6\sqrt{6} – 21\sqrt{6} – 5\sqrt{6}$
$A = – 20\sqrt{6}$.

VI. Développement, calcul littéral avec des racines carrées

Remarque

Attention, tout comme on ne peut pas ajouter ou soustraire des nombres et des x, on ne peut pas ajouter ou soustraire des nombres et des radicaux.
Ainsi, $2 + 3\sqrt{5}$ ne peut pas se réduire.

Exemples

Développer et réduire $A = \sqrt{3}(2\sqrt{3} + 5)$.

$A = \sqrt{3}(2\sqrt{3} + 5) = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times 5 = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
$A = 2 \times (\sqrt{3})^2 + 5\sqrt{3} = 2 \times 3 + 5\sqrt{3} = 6 + 5\sqrt{3}$.

Développer et réduire $B = (2\sqrt{3} – 5)^2$.

$B = (2\sqrt{3} - 5)^2$
$B = (a - b)^2$ avec $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 5$
$B = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 5$
$B = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times (2\sqrt{3}) \times (5) + (5)^2$ Garder les parenthèses !
$B = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \sqrt{3} + 25$
$B = 4 \times 3 - 20\sqrt{3} + 25$
$B = 12 - 20\sqrt{3} + 25$
$B = 37 - 20\sqrt{3}$.

On donne $A = 3x^2 – 5x + 4$. Calculer A pour $x = \sqrt{2}$.

On remplace x par $(\sqrt{2})$ dans l'expression de A.
Attention à garder les parenthèses.

$A = 3(\sqrt{2})^2 - 5(\sqrt{2}) + 4$
$A = 3 \times 2 - 5\sqrt{2} + 4$
$A = 6 - 5\sqrt{2} + 4$
$A = 10 - 5\sqrt{2}$.

VII. Suppression des radicaux au dénominateur

Méthode

Dans une expression avec des radicaux, on essaye toujours de supprimer ceux qui sont au dénominateur.

Pour ce faire, pour transformer une expression du type $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{b}$.

Exemples

Ecrire $A = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ avec un dénominateur entier.

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ecrire $\dfrac{7 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur.

$$B = \frac{7 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{7 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{(7 - 4\sqrt{5}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$B = \frac{7 \times \sqrt{5} - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$$

$$B = \frac{7\sqrt{5} - 4 \times (\sqrt{5})^2}{5}$$

$$B = \frac{7\sqrt{5} - 4 \times 5}{5}$$

$$B = \frac{7\sqrt{5} - 20}{5}.$$

RAF
Lien entre $x^2 = 9$ et $x^2 - 9 = 0$ et le calcul littéral avec les égalités remarquables puis équations produits.
Démonstration de $x^2 = a$.