

CHAPITRE 4 – Agrandissement et réduction

I. Introduction

Définition

Agrandir ou réduire une figure, c'est construire une figure de même forme en multipliant les longueurs de la figure initiale par un même nombre k strictement positif.

Le nombre k est appelé coefficient (ou rapport) d'agrandissement ou de réduction.

Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement.

Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une réduction.

Exemple

Soit un triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

Soit $A'B'C'$ un triangle obtenu par agrandissement de coefficient 1,5 du triangle ABC.

Soit $A''B''C''$ un triangle obtenu par réduction de coefficient 0,5 du triangle ABC.

- 1) Calculer les longueurs $A'B'$, $A'C'$ et $B'C'$.
- 2) Calculer les longueurs $A''B''$, $A''C''$ et $B''C''$.
- 3) Réaliser 3 triangles conformes à cet énoncé.

1) Comme $A'B'C'$ est un agrandissement de coefficient 1,5 du triangle ABC, on a :

$$\begin{array}{lll} A'B' = 1,5 \times AB & A'C' = 1,5 \times AC & B'C' = 1,5 \times BC. \\ A'B' = 1,5 \times 3 = 4,5 \text{ cm.} & A'C' = 1,5 \times 5 = 7,5 \text{ cm.} & B'C' = 1,5 \times 6 = 9 \text{ cm.} \end{array}$$

2) Comme $A''B''C''$ est une réduction de coefficient 0,5 du triangle ABC, on a :

$$\begin{array}{lll} A''B'' = 0,5 \times AB & A''C'' = 0,5 \times AC & B''C'' = 0,5 \times BC. \\ A''B'' = 0,5 \times 3 = 1,5 \text{ cm.} & A''C'' = 0,5 \times 5 = 2,5 \text{ cm.} & B''C'' = 0,5 \times 6 = 3 \text{ cm.} \end{array}$$

3) Figures sur Géogebra

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction, les mesures d'angles, le parallélisme et la perpendicularité sont conservés.

II. Agrandir ou réduire une figure

Méthode

Pour agrandir ou réduire une figure au rapport (ou coefficient) k , il suffit de conserver chaque mesure d'angle et de multiplier chaque longueur par le nombre k .

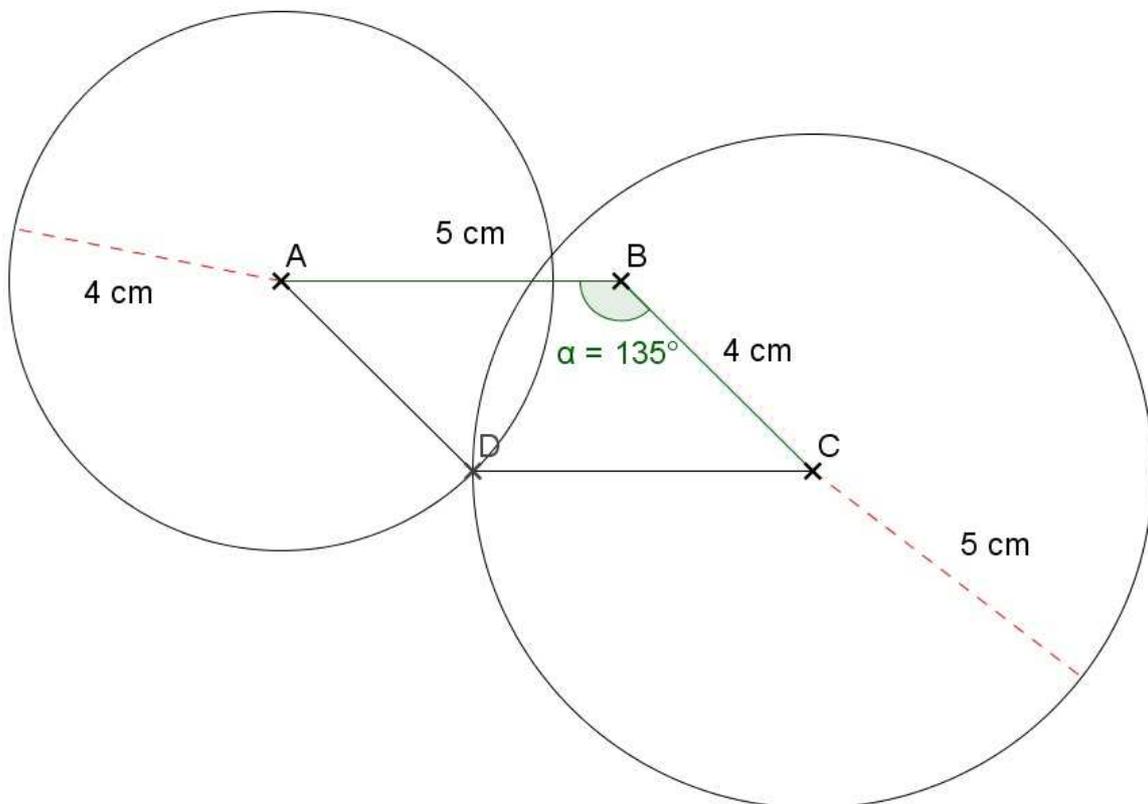
Exemple

ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 5 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$.

On donne également $\widehat{ABC} = 135^\circ$.

Tracer un tel parallélogramme et construire un parallélogramme $A'B'C'D'$, réduction du parallélogramme ABCD de rapport 0,8.

Figure initiale



III. Trouver un rapport d'agrandissement ou de réduction

Méthode

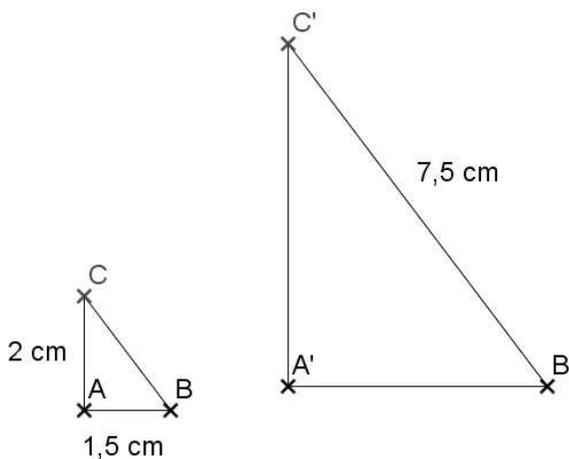
Pour trouver un rapport (ou un facteur, ou un coefficient) k d'agrandissement ou de réduction, il suffit souvent de faire le quotient d'une longueur après agrandissement ou réduction par la longueur dans la figure d'origine.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 1,5$ cm et $AC = 2$ cm.

$A'B'C'$ est un agrandissement du triangle ABC de rapport k .

On donne $B'C' = 7,5$ cm. Calculer la valeur du rapport k de l'agrandissement.



On sait que le triangle ABC est rectangle en A.

L'hypoténuse est [BC].

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

On remplace :

$$BC^2 = 1,5^2 + 2^2$$

$$BC^2 = 2,25 + 4$$

$$BC^2 = 6,25$$

$$BC = \sqrt{6,25}$$

$$BC = 2,5 \text{ cm.}$$

Donc $k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{7,5}{2,5} = 3$. Le rapport d'agrandissement est donc de 3.

IV. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires et les volumes

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction d'un objet au rapport k :

- 1) Le périmètre, ainsi que toutes les longueurs, sont multipliés par k .
- 2) L'aire est multipliée par k^2 .
- 3) Le volume est multiplié par k^3 .

Exemple 1

ABCD est un rectangle de longueur 8 cm et de largeur 6 cm.

A'B'C'D' est une réduction au rapport 0,25 du rectangle ABCD.

- 1) Représenter un tel rectangle ABCD.
- 2) Quel est le périmètre de ABCD ?
- 3) En déduire le périmètre de A'B'C'D'.
- 4) Quelle est l'aire de ABCD ?
- 5) En déduire l'aire de A'B'C'D'.

Exemple 2

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de longueur 8 cm, de largeur 6 cm et de hauteur 5 cm.

A'B'C'D'E'F'G'H' est un agrandissement au rapport 1,5 du parallélépipède rectangle ABCD.

- 1) Représenter un tel parallélépipède rectangle ABCDEFGH en perspective cavalière.
- 2) Quel est le volume de ABCDEFGH ?
- 3) En déduire le volume de A'B'C'D'E'F'G'H'.