

## CHAPITRE 4 – Agrandissement et réduction

### I. Introduction

#### Définition

Agrandir ou réduire une figure, c'est construire une figure de même forme en multipliant les longueurs de la figure initiale par un même nombre  $k$  strictement positif.

Le nombre  $k$  est appelé coefficient (ou rapport) d'agrandissement ou de réduction.

Si  $k > 1$ , il s'agit d'un agrandissement.

Si  $0 < k < 1$ , il s'agit d'une réduction.

#### Exemple

Soit un triangle ABC tel que  $AB = 3$  cm,  $AC = 5$  cm et  $BC = 6$  cm.

Soit  $A'B'C'$  un triangle obtenu par agrandissement de coefficient 1,5 du triangle ABC.

Soit  $A''B''C''$  un triangle obtenu par réduction de coefficient 0,5 du triangle ABC.

- 1) Calculer les longueurs  $A'B'$ ,  $A'C'$  et  $B'C'$ .
- 2) Calculer les longueurs  $A''B''$ ,  $A''C''$  et  $B''C''$ .
- 3) Réaliser 3 triangles conformes à cet énoncé.

1) Comme  $A'B'C'$  est un agrandissement de coefficient 1,5 du triangle ABC, on a :

$$\begin{array}{lll} A'B' = 1,5 \times AB & A'C' = 1,5 \times AC & B'C' = 1,5 \times BC. \\ A'B' = 1,5 \times 3 = 4,5 \text{ cm.} & A'C' = 1,5 \times 5 = 7,5 \text{ cm.} & B'C' = 1,5 \times 6 = 9 \text{ cm.} \end{array}$$

2) Comme  $A''B''C''$  est une réduction de coefficient 0,5 du triangle ABC, on a :

$$\begin{array}{lll} A''B'' = 0,5 \times AB & A''C'' = 0,5 \times AC & B''C'' = 0,5 \times BC. \\ A''B'' = 0,5 \times 3 = 1,5 \text{ cm.} & A''C'' = 0,5 \times 5 = 2,5 \text{ cm.} & B''C'' = 0,5 \times 6 = 3 \text{ cm.} \end{array}$$

3) Figures sur Géogebra

#### Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction, les mesures d'angles, le parallélisme et la perpendicularité sont conservés.

## II. Agrandir ou réduire une figure

### Méthode

Pour agrandir ou réduire une figure au rapport (ou coefficient)  $k$ , il suffit de conserver chaque mesure d'angle et de multiplier chaque longueur par le nombre  $k$ .

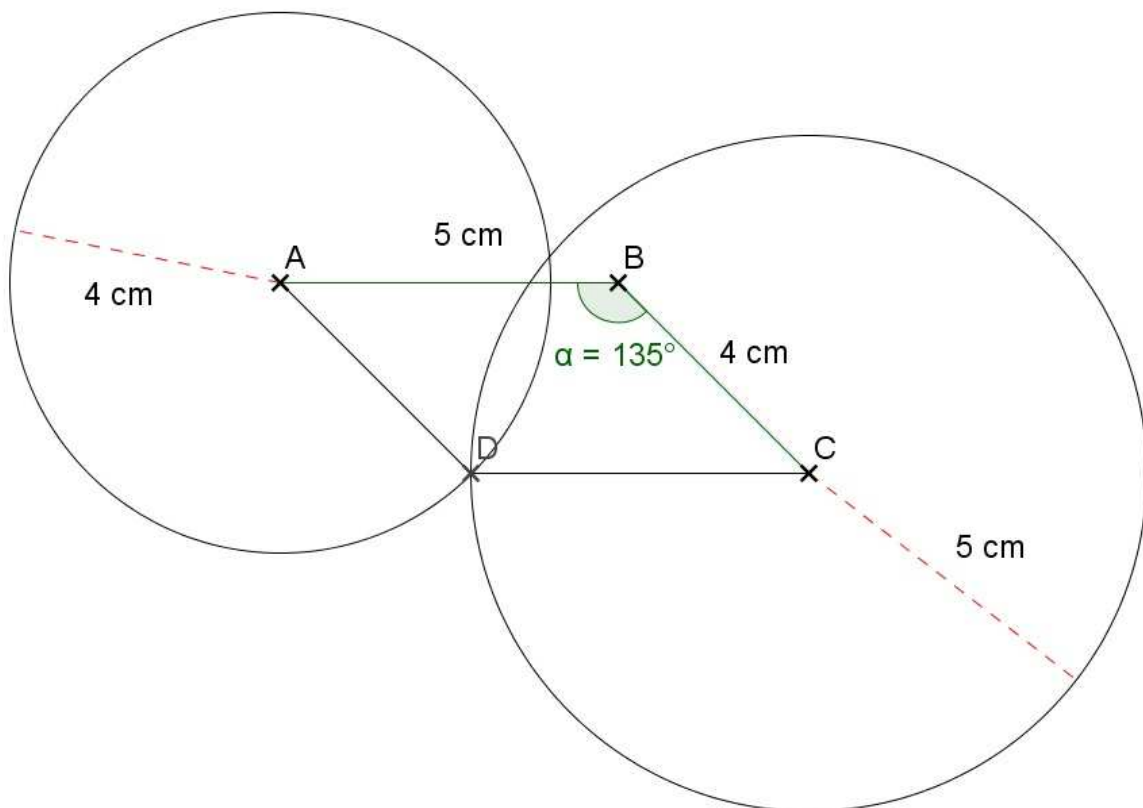
### Exemple

ABCD est un parallélogramme tel que  $AB = 5 \text{ cm}$  et  $BC = 4 \text{ cm}$ .

On donne également  $\widehat{ABC} = 135^\circ$ .

Tracer un tel parallélogramme et construire un parallélogramme  $A'B'C'D'$ , réduction du parallélogramme ABCD de rapport 0,8.

### Figure initiale



**Figure réduite**

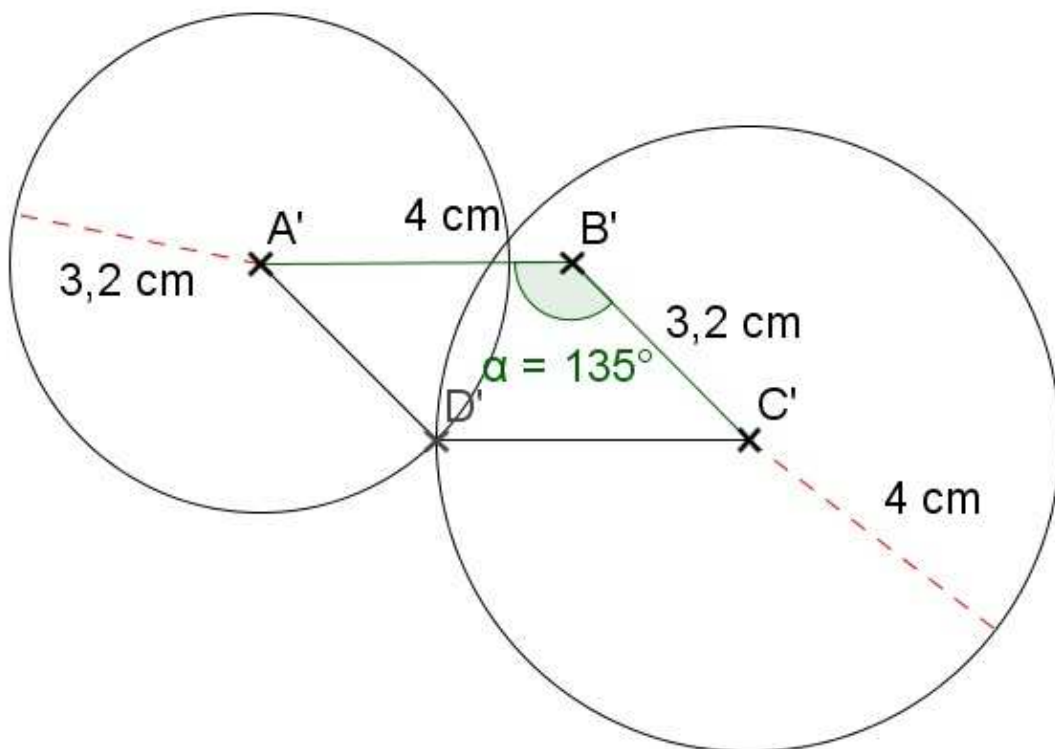
Comme  $AB = 5 \text{ cm}$ ,  $A'B' = 5 \times k = 5 \times 0,8 = 4 \text{ cm}$ .

Comme  $BC = 4 \text{ cm}$ ,  $B'C' = 4 \times k = 4 \times 0,8 = 3,2 \text{ cm}$ .

De plus, les mesures d'angles sont conservées dans une réduction donc :

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 135^\circ.$$

On en déduit la figure demandée.



### III. Trouver un rapport d'agrandissement ou de réduction

#### Méthode

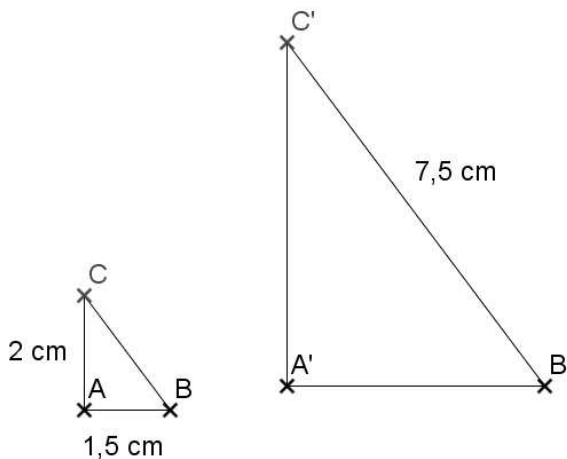
Pour trouver un rapport (ou un facteur, ou un coefficient)  $k$  d'agrandissement ou de réduction, il suffit souvent de faire le quotient d'une longueur après agrandissement ou réduction par la longueur dans la figure d'origine.

#### Exemple

ABC est un triangle rectangle en A tel que  $AB = 1,5$  cm et  $AC = 2$  cm.

$A'B'C'$  est un agrandissement du triangle ABC de rapport  $k$ .

On donne  $B'C' = 7,5$  cm. Calculer la valeur du rapport  $k$  de l'agrandissement.



On sait que le triangle ABC est rectangle en A.

L'hypoténuse est [BC].

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

On remplace :

$$BC^2 = 1,5^2 + 2^2$$

$$BC^2 = 2,25 + 4$$

$$BC^2 = 6,25$$

$$BC = \sqrt{6,25}$$

$$BC = 2,5 \text{ cm.}$$

Donc  $k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{7,5}{2,5} = 3$ . Le rapport d'agrandissement est donc de 3.

## **IV. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires et les volumes**

### **Propriété**

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction d'un objet au rapport  $k$  :

- 1) Le périmètre, ainsi que toutes les longueurs, sont multipliés par  $k$ .
- 2) L'aire est multipliée par  $k^2$ .
- 3) Le volume est multiplié par  $k^3$ .

### **Exemple 1**

ABCD est un rectangle de longueur 8 cm et de largeur 6 cm.

A'B'C'D' est une réduction au rapport 0,25 du rectangle ABCD.

- 1) Représenter un tel rectangle ABCD.
- 2) Quel est le périmètre de ABCD ?
- 3) En déduire le périmètre de A'B'C'D'.
- 4) Quelle est l'aire de ABCD ?
- 5) En déduire l'aire de A'B'C'D'.

### **Exemple 2**

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de longueur 8 cm, de largeur 6 cm et de hauteur 5 cm.

A'B'C'D'E'F'G'H' est un agrandissement au rapport 1,5 du parallélépipède rectangle ABCD.

- 1) Représenter un tel parallélépipède rectangle ABCDEFGH en perspective cavalière.
- 2) Quel est le volume de ABCDEFGH ?
- 3) En déduire le volume de A'B'C'D'E'F'G'H'.