CHAPITRE 3 – Comparaison, addition et soustraction en écriture fractionnaire

I. Ecritures fractionnaires

Définitions

Soient a et b 2 nombres avec $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ est appelée écriture fractionnaire du quotient de a par b (a : b).

On dit que a est le numérateur et b est le dénominateur.

Si a et b sont des nombres entiers, alors cette écriture est une fraction.

Exemples

$\frac{-3,9}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sont toutes deux des écritures fractionnaires.

$\frac{-3,9}{3}$ n'est pas une fraction. $\frac{1}{2}$ est une fraction.

$\frac{-3,9}{3} = -\frac{3,9}{3} = -3,9 : 3 = -1,3.$ $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5.$

Remarque

On ne peut jamais diviser un nombre par 0.
Le dénominateur d'un quotient écrit en écriture fractionnaire ne doit donc jamais être nul.

Exemple

$\frac{5}{0}$ n'existe pas. $\frac{-9}{0}$ non plus.

II. Quotients égaux et application

A. Propriété des quotients égaux

Propriété

Un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Si $b \neq 0$ et $k \neq 0$: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times k}{b \times k}$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a : k}{b : k}$

Exemples

$\dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1 \times 5}{2 \times 5} = -\dfrac{5}{10}$

$\dfrac{9}{-6} = -\dfrac{9}{6} = -\dfrac{9 : 3}{6 : 3} = -\dfrac{3}{2}$

B. Simplification de fractions

Définitions

Simplifier une fraction signifie écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Quand une fraction n'admet plus de simplification, on dit que cette fraction est irréductible.

Exemples

$\dfrac{24}{30} = \dfrac{3 \times 8}{3 \times 10} = \dfrac{8}{10}$

$\dfrac{-12}{-8} = +\dfrac{12}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{2 \times 6}{2 \times 4} = \dfrac{6}{4}$

$\dfrac{24}{30} = \dfrac{3 \times 8}{3 \times 10} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{2 \times 4}{2 \times 5} = \dfrac{4}{5}$ (fraction irréductible)

$\dfrac{-495}{385} = -\dfrac{495}{385} = -\dfrac{5 \times 99}{5 \times 77} = -\dfrac{99}{77} = -\dfrac{11 \times 9}{11 \times 7} = -\dfrac{9}{7}$ (fraction irréductible)

C. Réduction au même dénominateur

On peut toujours écrire deux fractions avec le même dénominateur.

Exemple

On veut écrire $-\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{4}$ avec le même dénominateur.

Les multiples de 6 sont : 6, 12, 18, 24, 36…
Les multiples de 4 sont : 4, 8, 12, 16, 20, …

Le plus petit nombre à la fois multiple de 6 et multiple de 4 est 12.

$-\frac{1}{6} = -\frac{2 \times 1}{2 \times 6} = -\frac{2}{12}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$

D. Produits en croix

Egalité des produits en croix

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ $\qquad$ ($b \neq 0$ et $d \neq 0$)

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\qquad$ ($b \neq 0$ et $d \neq 0$)

Exemple

Trouver le nombre x tel que $\frac{x}{-15} = \frac{-16}{-20}$

D'après l'égalité des produits en croix :
$-20 \times x = -16 \times (-15)$
$-20 \times x = 240.$
$x = 240 : (-20)$
$x = -12$

III. Comparaison de nombres en écriture fractionnaire

A. Cas où les dénominateurs sont les mêmes

Propriété

Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même dénominateur positif, alors le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

Exemples

$\frac{4}{5} < \frac{7}{5}$ $\frac{1,07}{8} > \frac{1,008}{8}$ $\frac{-7}{11} > \frac{-9}{11}$ $-\frac{1}{6} < \frac{5}{6}$

B. Cas où les dénominateurs sont différents

Méthode

Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire ayant des dénominateurs différents, on les écrit d'abord avec un même dénominateur (il faut chercher un "dénominateur commun").

Exemple

Comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$.

Les dénominateurs sont 8 et 12.
Les multiples de 8 sont : 8, 16, 24, 32, 40…
Les multiples de 12 sont : 12, 24, 36, 48, 60, …
On choisit donc 24 comme dénominateur commun.

$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$ et $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}$

$\frac{15}{24} > \frac{14}{24}$ donc on en déduit que $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$.

IV. Addition et soustraction en écriture fractionnaire

A. *Les dénominateurs sont les mêmes*

Addition / soustraction de nombres relatifs en écriture fractionnaire (cas d'un même dénominateur)

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ $(c \neq 0)$

Pour additionner (ou soustraire) des nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

Exemples

$A=\frac{-7}{3}+\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=\frac{-7+5}{3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

$B=\frac{4}{9}-\frac{8}{9}=\frac{4-8}{9}=\frac{-4}{9}=-\frac{4}{9}$

B. *Les dénominateurs sont différents*

Addition / soustraction de nombres relatifs en écriture fractionnaire (cas de dénominateurs différents)

Pour additionner (ou soustraire) des nombres relatifs en écriture fractionnaire de dénominateur différent, on les réduit d'abord au même dénominateur.

Exemples

$\frac{-5}{6}+\frac{3}{4}=-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=-\frac{5\times 2}{6\times 2}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=-\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{-10+9}{12}=\frac{-1}{12}=-\frac{1}{12}$

$-2-\frac{1}{3}=-\frac{2}{1}-\frac{1}{3}=-\frac{2\times 3}{1\times 3}-\frac{1}{3}=-\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=\frac{-6-1}{3}=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}$

